اهداء إلى قسم الرياضيات

٢٨/١١/ ٢٠٠٦

المدخل إلى التحليل الدالي

وتطبيقاته

تأليف

إيروين كريزيك

Erwin Kreyszig

ترجمة

الدكتور خضر حامد الأحمد

أستاذ في كلية العلوم - جامعة دمشق

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

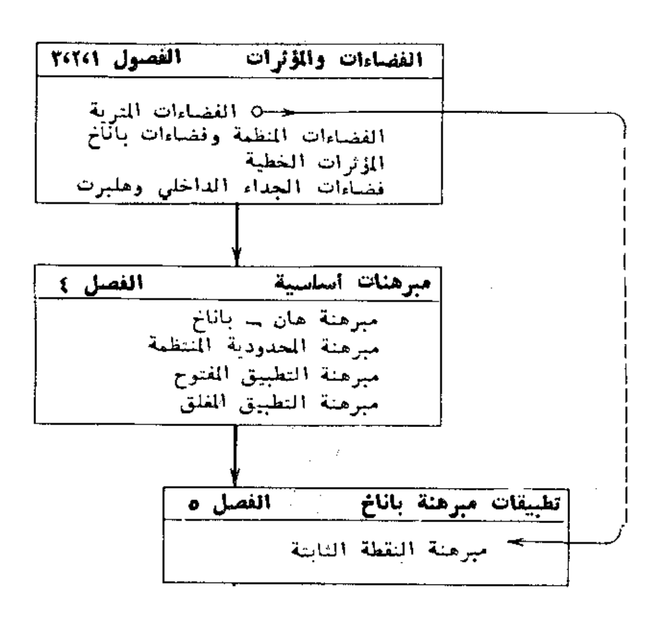
نشأ التحليل الدالي في أوائل القرن العشرين • ورغم حداثة سنه نسبيا ، الا أنه يشغل حاليا مركزا متميزا بين العلوم الرياضية المعاصرة ، كما وأن تطبيقاته تغطي رقعة واسعة من ساحها • وليس من قبيل المبالغة القول بأن التحليل الدالي أحدث انعطافا في الفكر الرياضي ، شبيها بذاك الذي خلّفه ادخال المتغيرات في علم الرياضيات في القرن السابع عشر ، والذي أدى الى نشوء الحساب التفاضلي والتكاملي • وبعد صدور كتاب الرياضي البولوني الكبير بأناخ «Théorie des opérations linéaires» عام ١٩٣٢ ، أخذت أفكار ولغة التحليل الدالي طريقها الى العديد من فروع العلوم الرياضية وتطبيقاتها ، حتى ليكاد يتعذر الفصل أحيانا بين التحليل الدالي والمواضيع التي يطبق فيها •

ومفهوم « المؤثر » يشغل مركز الصدارة في التحليل الدالي ،

وهو تعميم لمفهوم الدالة التي لولاها لمـا كان للتحليل الرياضي أن يكون • ودراسة النظرية العامة للمؤثرات تكمن في صلب التحليــل الدالي • وفي حين يُعنَى التحليل الرياضي بدراسة مجموعة منتهية من الدوال والعلاقات التي تربط بينها ، فان التحليل الدالي يستعيض عن هذا بدراسة فضاءات الدوال والعمليات عليها • فالمؤثر التفاضلي مثلا لا يتناول كل دالة على حدة أو مجموعة منتهية من الدوال ، كما هو الحال في التحليل الرياضي التقليدي ، بل يتناول صفا كاملا من الدوال ، ويدرس فضاء الدوال الحاصل نتيجة إعمال هـذا المؤثر • كذلك فقد لاحظ بعض علماء الرياضيات في باكورة هذا القرن ، وفي مقدمتهم بانـاخ Banach وريـس Riesz أن معالجة بعض المسائل المختلفة في الرياضيات التقليدية من وجهة نظر أكثر عمومية وأشـد تجريدا تمكننا من التوصل الى دراسة موحدة للعديد من هذه المسائل التي تبدو للوهلة الاولى وكأنها بعيدة كل البعد احداها عن الاخرى • فدراسة المعادلة $y = f(x)$ مثلا تسمح بتوحيد معالجة مسائل كانت تُبحث كل منها على حدة في نطاق أنظمة رياضية مختلفة • وبصورة أدق تحديدا ، فان هذه المعالجة للمعادلة السابقة أدت الى حل مسائل الوجـود للمعادلات التفاضليـة ، والمعادلات التكامليـة والمعادلات الجبريـة •

يهدف هذا الكتاب الى تعريف القارىء على المفاهيم والطرائق الاساسية المعتمدة في التحليل الدالي ؛ وهو ابتدائي في مضمونه إذ أن قراءته لا تتطلب سوى معرفـة مبادىء الجبـر الخطي والتحليل الرياضي • هذا وان **محتوى الكتاب يتناول ترجمة لخمسة فقط مـن فصول الكتاب الاحد عشر** ، وهو يغطي مفردات مقـرر (التحليـل التابعي) الذي يدرس في الصف الرابع لطلاب قسم الرياضيات في جامعة دمشق بمعدل أربع ساعات معتمدة أسبوعيا •

ويبين المخطط التالي الترتيب الذي أورده المؤلف للمواضيع التي يحتويها هذا الكتاب •



لدى النظر الى هذا المخطط نرى أن المؤلف أورد نظرية فضاءات باناخ (في الفصل الثالث) قبل ايراد المبرهنات الاساسية حول الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ (في الفصل الرابع) • ويرى المؤلف أن السبب في هذا يعود الى أن هذه الفضاءات أبسط ، ولانها تساهم في رفد الفصل الرابع بأمثلة اضافية ، وأهم من هذا وذاك ، لانها تعطي الطالب احساسا أفضل بالصعوبات التي يجابهها لدى انتقاله من فضاءات هلبرت الى فضاءات باناخ العامة •

ان المترجم يدرك تماما العقبات التي تقف في سبيل القارىء العربي لدى دراسته لكتاب في الرياضيات معرب أو مؤلف في بلد

عربي آخر • وانني لا أرى وسيلة لتذليل هذه العقبات سوى التقيد قدر الامكان بالمصطلحات التي أقرها المكتب الدائم لتنسيق التعريب التابع للجامعة العربية ، وايراد ثبت للمصطلحات العربية المعتمدة في الكتاب مرتبة وفق حروف الهجاء العربية مع مقابل كل منها باللغة الانجليزية • وفي هذا الصدد ، فقد أفدت كثيرا من المعجمين التاليين :

١ ـ **معجم الرياضيات المعاصرة** ، للدكاترة : صلاح أحمد وموفق دعبول والهام حمصي (مؤسسة الرسالة ١٩٨٣ م) •

٢ ـ **معجم الرياضيات** للدكاترة فوزي دنان وسعيد باقر وصابر العايدي وهاني فران (مؤسسة الكويت للتقدم العلمي ١٩٨٣ م) •

ان ترجمتي هذه لجزء من كتاب بلغة أجنبية هو جهد متواضع لاضافة مرجع جديد لطلابنا العرب في موضوع تعتبر أي ثقافة رياضية خالية منه فاقدة لركن أساسي فيها • وآمل أن لا يضن القراء الاعزاء بتنبيهي الى الاخطاء الواردة في الكتاب (والتي هي بالطبع من صنع المترجم وليس للمؤلف دخل فيها) كي يصار الى تصحيحها في طبعة قادمة باذن الله ، ولهم مني سلفا كل شكر وامتنان •

دمشق في ١ آذار ١٩٨٥

المترجم

الفصل الأول

الفضـاءات المترية

يمثل التحليل الدالي أحد الفروع المجردة مـن علم الرياضيات والمنبثقة عن التحليل الرياضي التقليدي • وقد بدأ هذا الفرع بالتطور منذ قرابة ثمانين عاما ، كما أن طرائقه ونتائجه هي اليوم على درجة كبيرة من الاهمية في الحقول المختلفة للعلوم الرياضية وتطبيقاتها • وقد كان الدافع لنشوء التحليل الدالي كل من الجبر الخطي ، والمعادلات التفاضلية الخطيـة العادية والجزئيـة ، وحساب التغيرات ، ونظرية التقريب ، وبوجه خاص نظرية المعادلات التكاملية الخطية التي كان لهـا أكبر الاثر في تطوير الافكار المعاصرة • وقد لاحظ الرياضيون أنه غالبا ما يكون للمسائل المنسوبة الى حقول مختلفة من علم الرياضيات مظاهر وخواص مرتبطة فيما بينها • وقد استغلت هذه الحقيقة بهدف التوحيد الفعال لمعالجة مثل هـذه المسائل ، وقد تم هذا التوحيد بأن حذفت التفاصيل غير الاساسية • لـذا فـان الفائدة التى تجنى من هذه **المعالجة المجردة** تكمـن في أنها تركز عـلى الحقائق الاساسية ، التي تغدو مرئية بوضوح ، لكون انتباه الباحث غير مشتت في خِضَم التفاصيل غير الهامة •

وفي هذا الصدد ، فان الاسلوب المجـرد هـو أبسط الاساليب وأكثرهـا اقتصادا لدى معالجة الانظمة الرياضية • وبما أنه يوجد لكل نظام مجرد في الحالة العامة تجسيدات محددة مختلفـة (تسمى **نمـاذج**) ، فاننا نـرى أن الاسلوب المجرد متعدد الاستعمالات لدى تطبيقه على حالات محددة • وهـو يساعد في

تحرير المسألة من عزلتها ، كما وأنه يوجد علاقات بين حقول لم يكن في السابق أي صلات فيما بينها •

وفي المعالجة المجردة ، فاننا ننطلق عادة من مجموعة من العناصر تحقق مسلمات معينة • أما طبيعة العناصر فتترك دون تحديد ، وهذا أمر نفعله عن قصد • وعندئذ تتألف النظرية من نتائج منطقية تسمى مبرهنات نستخلصها من المسلمات • ويعني هذا أنه في سياق هذه المعالجة انطلاقا من المسلمات ، فاننا نحصل على بنية رياضية ، نجد نظريتها بطريقة مجردة • وهذه المبرهنات العامة يمكن أن تطبق بعدئذ على مجموعات خاصة متنوعة تحقق المسلمات •

وعلى سبيل المثال ، ففي الجبر تستعمل هذه المعالجة في الحقول والحلقات والزمر • وفي التحليل الدالي ، فاننا نستعملها في سياق **الفضاءات المجردة** • وهذه الفضاءات على غاية من الاهمية ، وسندرس بعضا منها بكثير من التفصيل (فضاءات باناخ وفضاءات هلبرت) • وسنرى أن مفهوم الفضاء هنا يستعمل بمعنى واسع جدا بصورة مدهشة • **فالفضاء المجرد** هو مجموعة عناصر (ذات طبيعة كيفية) تحقق مسلمات معينة • وباختيارنا جملا مختلفة من المسلمات ، فاننا نجد أنماطا مختلفة من الفضاءات المجردة •

ان فكرة استعمال فضاءات مجردة بصورة منهجية يعزى الى م• فريشيه (١٩٠٦ م)،وهذا مبرر بالنجاح الكبير الذي حققته هذه الفضاءات •

سندرس في هذا الفصل الفضاءات المترية ، وهذه الفضاءات أساسية في التحليل الدالي لكونها تلعب دورا مماثلا لذلك الذي يلعبه المحور الحقيقي **R** في الحساب التفاضلي والتكاملي • وفي الحقيقة ، فان هذه الفضاءات تعميم لـ **R** ، وقد ابتدعت لتشكيل قاعدة لمعالجة موحدة لمسائل هامة تنتمي الى فروع مختلفة من التحليل •

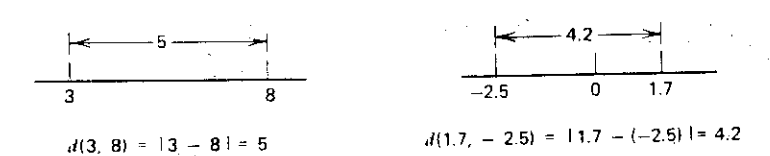
سنعرف أولا الفضاءات المترية ومفاهيم متعلقة بها ، كما وسنوضحها بأمثلة نموذجية • وسنناقش الفضاءات الخاصة ذات الاهمية العملية بصورة مفصلة • وسنولي كثيرا من الاهتمام لمفهوم التمام ، وهو خاصة قد يكون الفضاء المتري متمتعا بها ، وقد لا يكون • ويلعب التمام دورا أساسيا في كتابنا هذا كله •

مفاهيم هامة • توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

الفضاء المتري (راجع ١–١–١) هو مجموعة X مزودة بمترك • ويقرن المترك بكل زوج من العناصر **(النقاط)** من X **مسافة** • ويعرف المترك بالمسلمات التي تحدده ، وقد اقترحت هذه المسلمات استنادا الى خواص بسيطة محددة للمسافة المألوفة بين نقاط المحور الحقيقي **R** والمستوي العقدي **C** • وتبين الامثلة الاساسية (كالمثالين ١–١–٢ و ١–١–٣) أن مفهوم الفضاء المتري هو عام بصورة ملفتة للنظر • ومن الخواص الاضافية ذات الاهمية البالغة التي يمكن أن يتسم بها الفضاء المتري ، خاصة **التمام** (راجع ١–٤–٣) التي سندرسها باسهاب في الفصلين ١–٥ و ١–٦ • وثمة مفهوم آخر ذو أهمية نظرية وعملية ، هو مفهوم **فصولية** الفضاء المتري (راجع ١–٣–٥) • والفضاءات المترية الفصولة أبسط من الفضاءات غير الفصولة •

١–١ الفضاء المتري

ندرس في الحساب التفاضلي والتكاملي الدوال المعرفة على المحور الحقيقي **R** • ولا يحتاج المرء للكثير من الجهد كي يرى في عمليات الانتقال الى النهاية وفي كثير من الاعتبارات الاخرى ، اننا نستعمل حقيقة وجود دالة مسافة على **R** ، ولنرمز لها بـ d ، بحيث يقابل كل زوج من النقاط x, y من **R** وفق هذه الدالة المسافة $d(x, y)=|x-y|$ • ويوضح الشكل (٢) هذا الرمز • هذا ونجد وضعا مماثلا في المستوي وفي الفضاء « ثلاثي البعد » المألوف •



الشكل (٢) • المسافة على R

أما في التحليل الدالي ، فاننا ندرس « فضاءات » أعم و « دوال » معرفة على هذه الفضاءات • ونتوصل الى مفهوم عام ومرن بدرجة كافية لمفهوم « الفضاء »

على النحو التالي : نستعيض عن مجموعة الاعداد الحقيقية **R** بمجموعة **مجردة** X (وهي مجموعة عناصر ذات طبيعة غير محددة) ونحدد على X « دالة مسافة » تتمتع بقدر ضئيل من الخواص الاساسية جدا لدالة المسافة على **R** ٠ ولكن ما الذي نعنيه بعبارة « الاساسية جدا » ؟ ان هذا السؤال بعيد عن أن يكون سؤالا تافها ، ذلك أن اختيار وصياغة المسلمات لدى ايراد تعريف ما أمر يحتاج دوما الى خبرة وإلفة مع المسائل العملية وفكرة واضحة عن الهدف الذي نسعى اليه ٠ وفي حالتنا هذه ، فانه انقضى أكثر من ستين سنة قبل التوصل الى المفهوم التالي الذي يعتبر أساسيا وبالغ الاهمية في التحليل الدالي وتطبيقاته ٠

١-١-١ تعريف (الفضاء المتري ، المترك)

الفضاء المتري هو زوج (X, d)، حيث X مجموعة و d **مترك على** X (أو **دالة مسافة على** X) ، أي دالة معرفة* على $X \times X$ بحيث تحقق الخواص التالية أيا كان x, y, z من X :

(م١) d دالة حقيقية وغير سالبة ٠

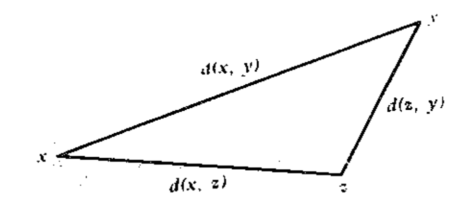
(م٢) الشرط اللازم والكافي كي يكون $d(x, y)=0$ هو أن يكون $x=y$

(م٣) $d(x, y)=d(y, x)$ **(التناظر)** ٠

(م٤) $d(x, y) \leqq d(x, z)+d(z, y)$ **(متباينة المثلث)** ٠

سنورد فيما يلي بعض المصطلحات ٠ تسمى X عادة **مجموعة الرديف** للزوج (X, d) ، كما تدعى عناصرها **نقاطا** ٠ ولدى تثبيت x ، y ، فاننا نسمي العدد غير السالب $d(x, y)$ **المسافة** من x الى y ٠ وتشكل الخواص بدءا من (م١) حتى (م٤) **موضوعات المترك** ٠ واسم «متباينة المثلث» الذي أطلقناه على الموضوعة(م٤) مأخوذ من الهندسة الابتدائية كما هو مبين في الشكل (٣) ٠

(*) يشير الرمز × الى **الجداء الديكارتي لمجموعتين حيث** $A \times B$ هو مجموعة كل الازواج المرتبة (a, b) ، حيث $a \in A$ و $b \in B$ ٠ لذا فان $X \times X$ هو مجموعة كل الازواج المرتبة من عناصر X ٠



الشكل (٢) • متباينة المثلث في المستوي

وباستعمال الاستقراء الرياضي ، فاننا نستنتج من الموضوعة (م٤) **متباينة المثلث المعممة** التاليـة :

$$d(x_1, x_n) \leqq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \quad (1)$$

وبدلا من كتابة (X, d) يمكن أن نكتفي بكتابة X اذا لم يكن ثمة مجال للالتباس •

ونحصل على **فضاء جزئي** $(Y, \bar{d})$ من الفضاء (X, d) اذا أخذنا مجموعة جزئية Y من X ، وقصرنا d على $Y \times Y$ • وهكذا ، فان المترك على Y هو المقصور

$$\bar{d} = d|_{Y \times Y}$$

ويسمى $\bar{d}$ المترك **المحدث** على Y بالمترك d (أو **المستخلص** من المترك d)

سنورد الآن أمثلة على الفضاءات المترية ، بعضها مألوف لدى القارىء • ولاثبات أن هذه فضاءات مترية ، فمن الواجب التحقق في كل حالة من صحة الموضوعات (م١) حتى (م٤) • وفي الأحوال العادية ، فان التحقق من صحة (م٤) يتطلب جهدا أكبر مما يلزم للموضوعات (م١) حتى (م٣) • بيد أن هذا لن يكون معقدا في الامثلة التي سنوردها ، الامر الذى يسمح لنا بترك مسألة التحقق للقارىء • أما الفضاءات المترية المعقدة التي يكون التحقق فيها من صحة (م٤) ليس بالامر السهل ، فاننا سنوردها في الفصل القادم •

أمثلــة

١ـ١ـ٢ المحور الحقيقي

وهو مجموعة الاعداد الحقيقية المزودة بالمترك المعتاد المحدد بالمساواة

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{2}$$

١ـ١ـ٣ المستوى الاقليدي $\mathbf{R}^2$

نحصل على الفضاء المتري $\mathbf{R}^2$ ، الذي يسمى **بالمستوى الاقليدي** ، اذا أخذنا مجموعة كل الازواج المرتبة مـن الاعــداد الحقيقيــة ، مثـل* $x = (\xi_1, \xi_2)$ و $y = (\eta_1, \eta_2)$ ، •• الخ ، وأخذنا **المترك الاقليدي** المعرف بالمساواة

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \qquad (\geqq 0) \tag{3}$$

انظر الشكل (٤) •

ونحصل على فضاء متري آخر اذا أخذنا المجموعة نفسها كما سبق ، الا أننا سنختار متركا آخر d_1 معرفا بالدستور

$$d_1(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|. \tag{4}$$

ان هذا يوضح حقيقة هامة ، وهي أنه يمكننا أن نحصل من مجموعة معطاة (تحوي أكثر من عنصر واحد) على فضاءات مترية مختلفة ، وذلك باختيار متارك مختلفة • (لا يوجد للفضاء المتري حيث المترك هو d_1 اسم متفق عليه • ويطلق على d_1 أحيانا اسم **مترك سيارة الاجرة** • لماذا ؟ ويرمز أحيانا الى $\mathbf{R}^2$ بالشكل E^2) •

(*) لم نكتب $x = (x_1, x_2)$ ، ذلـك ان x_1 , x_2 ستلزمنا في المستقبل (بدءا من البند ١ـ٤) عند دراستنا للمتتاليات •

الشكل (٤) • المترك الاقليدي على المستوي

١ـ١ـ٤ الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد $\mathbf{R}^3$

يتألف هذا الفضاء المتري من مجموعة الثلاثيات المرتبة من الاعداد الحقيقية $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ••• الخ ، المزودة **بالمترك الاقليدي** المعـرف كالتالـي :

$$d(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2} \qquad (\geqq 0) \tag{5}$$

١ـ١ـ٥ الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$ ، الفضاء الوَحْدي $\mathbf{C}^n$ ، المستوي العقدي $\mathbf{C}$

ان الامثلة السابقة ليست سوى حالات خاصة من **الفضاء الاقليدي** $\mathbf{R}^n$ ذي الابعاد n • ونجد هذا الفضاء اذا أخذنا مجموعة كل المرتّبات n من الاعداد الحقيقية، والتي نكتبها بالشكل

$$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n), \qquad y=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$$

••• الخ ، والمزودة **بالمترك الاقليدي** المعرف بالدستور

$$d(x, y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \qquad (\geqq 0) \tag{6}$$

ويعرف **الفضاء الوَحدي** $\mathbf{C}^n$ **ذو البعد** n بأنه فضاء كل المرتبات n من الاعداد العقدية المزودة بالمترك التالي :

$$d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2} \quad (\geqq 0) \tag{7}$$

وعندما $n = 1$ ، فان هذا الفضاء يغدو المستوي العقدي $\mathbf{C}$ المـزود بالمترك المعتاد المعـرف بالمساواة

$$d(x, y) = |x - y| \tag{8}$$

(يسمى $\mathbf{C}^n$ أحيانا **بالفضاء الاقليدي العقدي ذي البعد** n) .

١-١-٦ فضاء المتتاليات l^∞

ان هذا المثال والذي يليه يعطيان انطباعا أولا عن مدى العمومية التي ينطوي عليها مفهوم الفضاء المتري . سنأخذ X على أنها مجموعة كل المتتاليات المحدودة من الاعداد العقدية ، أي أن كل عنصر من X هو متتالية عقدية

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$$

أو اختصارا

$$x = (\xi_j)$$

بحيث أنه أيا كان $j = 1, 2, \cdots$ ، فان

$$|\xi_j| \leqq c_x$$

بافتراض c_x عددا حقيقيا قد يتبع x ، الا أنه لا يتبع j . سنختار المترك محددا بالمسـاواة

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbf{N}} |\xi_j - \eta_j| \tag{9}$$

حيث $y=(\eta_i)\in X$ ، $\mathbf{N}=\{1, 2, \cdots\}$ ، وحيث يرمز sup الـى الحد الأعلى .
ويرمز للفضاء المتري الذي نجده وفق الفروض السابقة بالشكل l^∞ . (سيبرر هذا الرمز الغريب الى حد ما في البند ١ــ٢ــ٣ من الفصل التالي) . ان l^∞ هو **فضاء متتاليات** ، ذلك أن كل عنصر من X (أي أن كل نقطة في X) متتالية .

١ــ١ــ٧ فضاء الدوال $C[a, b]$

نأخذ X هنا مجموعة كل الدوال الحقيقية x ، y ، ... التي هي دوال لمتغير حقيقي مستقل t ، وهي معرفة ومستمرة على مجال مغلـق معطـى $J=[a, b]$.
وباختيار المترك وفق المساواة

$$d(x, y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|, \tag{10}$$

حيث max تشير الى القيمة العظمى ، فاننا نجد فضاء متريا نرمز له بـ $C[a, b]$.
(الحرف C يمثل الحرف الاول من الكلمة الانجليزية "continuous." ، التي تعني « مستمر ») . ان هذا هو **فضاء دوال** لان كل نقطة من $C[a, b]$ هي دالة .

على القارىء أن يدرك الفرق الشاسع بين الحساب التفاضلي والتكاملي ، حيث ندرس دالة واحدة أو عددا قليلا من الدوال في آن واحد ، وبين التحليل الدالي حيث تغدو الدالة مجرد نقطة في فضاء واسع .

١ــ١ــ٨ الفضاء المتري المتقطع

لنأخذ أي مجموعة X ، ولنزودها بما يسمى **المترك المتقطع** المعرف كما يلي :

$$d(x, x)=0, \qquad d(x, y)=1 \qquad (x\neq y)$$

يسمى هذا الفضاء (X, d) **الفضاء المتري المتقطع** . ورغم أنـه نادرا ما يرد في التطبيقات ، الا أننا سنستعمله في الامثلة بغية ايضاح بعض المفاهيم .

لدى النظر الى ١ـ١ـ١ ، فاننا نرى أن الفضاء المتري يعرف استناداً الى موضوعات ، ونريد أن نذكر بأن التعاريف بالموضوعات تستعمل اليوم في العديد من فروع علم الرياضيات • وقد تم الاعتراف بفائدتها عموما بعد أن نشر هلبرت بحثه حول أسس الهندسة ، ومن المهم ملاحظة أنه كان لدراسة الهندسة التي هي أحد **اقدم** وأبسط أقسام العلوم الرياضية أكبر وأهم الاثر في الرياضيات **المعاصرة** •

مسائل

١ ـ أثبت أن المحور الحقيقي هو فضاء متري •

٢ ـ هل تحدد المساواة $d(x, y) = (x-y)^2$ متركا على مجموعة الاعداد الحقيقية ؟

٣ ـ بيّن أن $d(x, y) = \sqrt{|x-y|}$ تحدد متركا على مجموعة الاعداد الحقيقية •

٤ ـ أوجد كل المتارك على مجموعة X مؤلفة من نقطتين ، وعلى مجموعة وحيدة العنصر •

٥ ـ ليكن d متركا على X • حدد كل الثوابت k بحيث يكون (i) kd (ii) $d+k$ متركا على X •

٦ ـ بيّن أن d في ١ـ١ـ٦ يحقق متباينة المثلث •

٧ ـ اذا كان A فضاء جزئيا من l^∞ مؤلفا من كل المتتاليات التي كل حد فيها اما 0 واما 1 ، فما هو المترك المحدث على A ؟

٨ ـ بيّن أنه يمكن تعريف مترك آخر $\tilde{d}$ على المجموعة X في ١ـ١ـ٧ بالمساواة

$$\tilde{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt.$$

٩ ـ أثبت أن d الوارد في ١ـ١ـ٨ هو مترك •

١٠ـ **(مسافة هامنغ)** لتكن X مجموعة كل الثلاثيات المرتبة من الاصفار والواحدات • بيّن أن X تتألف من ثمانية عناصر ، وأنه يمكن تحديد مترك

d على X بالمساواة $d(x, y)$ = عدد المساقط المتقابلـة المختلفة للعنصرين x و y • (اذا كان $x = (x_1, x_2, x_3)$ ، فاننا نسمي x_i المسقط الـ i للعنصر x) • ان هذا الفضاء والفضاءات المماثلة التي عناصرها مرتبات n ترد في التحويل ونظرية الاوتوماتا وفي التصنيف • يسمى $d(x, y)$ **مسافة هامنغ** بـين x و y) •

١١ــ أثبت صحة المتباينة (1) •

١٢ ــ **(متباينة المثلث)** • لمتباينة المثلث نتائـج مفيدة عـدة • فمثلا ، أثبت استنادا الى (1) أن

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leqq d(x, z) + d(y, w)$$

١٣ــ أثبت استنادا الى متباينة المثلث أن

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqq d(x, y)$$

١٤ــ **(موضوعات المترك)** • من الممكن الاستعاضة عن (م١) ــ (م٤) بموضوعات أخرى (دون تغيير التعريف) • بيّن علـى سبيل المثال أن (م٣) و (م٤) تستنتجان من (م٢) ومن المتباينة

$$d(x, y) \leqq d(z, x) + d(z, y)$$

١٥ــ بيّن أن كون المترك أكبر من الصفر أو يساويه تنتج من (م٢) ــ (م٤) •

١ــ٢ امثلة اخرى على الفضاءات المترية

سنورد الآن ثلاثة من الامثلة الاضافية ، بهدف ايضاح مفهوم الفضاء المتري وطريقة التحقق من موضوعات المترك ، وبصورة خاصة متباينة المثلث (م٤) •والمثال الاخير l^p هو أهمها من حيث تطبيقاته •

١ـ٢ـ١ فضاء المتتاليات s

يتألف هذا الفضاء من مجموعة كل المتتاليات (المحدودة وغير المحدودة)التي حدودها أعداد عقدية ، ومن المترك d المعرف بالدستور

$$d(x, y)=\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j-\eta_j|}{1+|\xi_j-\eta_j|}$$

حيث $x=(\xi_j)$ و $y=(\eta_j)$. لاحظ أن المترك في المثال ١ـ١ـ٦ لن يكون مناسبا في الحالة الراهنة . (لماذا ؟)

ان الموضوعات (م١) ـ (م٣) محققة ، الامر الذي يمكن رؤيته بكل بساطة. سنتحقق الآن من الموضوعة (م٤).سنستعمل لهذا الغرض الدالة المساعدة f المعرفة علـى $\mathbf{R}-\{-1\}$ بالمسـاواة

$$f(t)=\frac{t}{1+t}$$

وبالاشتقاق نجد أن $f'(t)=1/(1+t)^2$ ، وهو مقدار موجب . لذا فان f رتيبة متزايدة . وبالتالي فان

$$|a+b| \leqq |a|+|b|$$

وهذا يقتضي أن يكون

$$f(|a+b|) \leqq f(|a|+|b|)$$

نستنتج من هذا استنادا الى عبارة f والى متباينة المثلث بالنسبة للاعداد أن

$$\begin{aligned}
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\
&= \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\
&\leqq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.
\end{aligned}$$

سنضع في هــذه المتباينة $a=\xi_i-\zeta_i$ و $b=\zeta_i-\eta_i$ ، حيـــث $z=(\zeta_i)$ • اذن $a+b=\xi_i-\eta_i$ ، وبالتالـــي فـــان

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqq\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}$$

واذا ضربنا طرفي هذه المتباينة بـ $1/2^i$ ثم جمعنا من $j=1$ حتى ∞ ، فاننا نجد $d(x,y)$ في اليسار ومجموع $d(x,z)$ و $d(z,y)$ في اليمين ، أي :

$$d(x,y)\leqq d(x,z)+d(z,y)$$

وبذا نكون قد وجدنا (م٤) وأثبتنا أن s هو فضاء متري •

١-٢-٢ فضاء الدوال المحدودة $B(A)$

ان كل عنصر x من $B(A)$ هو بالتعريف دالة معرفة ومحدودة على مجموعة معطاة A ، والمترك يحدد بالمساواة

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|$$

حيث يشير sup الى الحد الاعلى • وفي الحالة $A=[a,b]\subset\mathbf{R}$ ، فاننا نشير الى $B(A)$ بالشكل $B[a,b]$ •

سنبين الآن أن $B(A)$ فضاء متري • من الواضح مباشرة أولا صحة الموضوعتين (م١) و (م٣) • كذلك ، فـان المساواة $d(x,y)=0$ واضحة • وبالعكس ، فاذا كـان $d(x,x)=0$ فان $x(t)-y(t)=0$ أيا كان t من A ، وهذا يعني أن $x=y$ • وبذا نكون قد أثبتنا صحة (م٢) كذلك • نلاحظ الآن أنه أيا كان t من A فان

$$|x(t)-y(t)|\leqq|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$

$$\leqq\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|.$$

وهذا يبين أن $x-y$ دالة محددة على A • وبمـا أن العبارة الواردة في السطر الاخير ليست تابعة للمتغير t ، فانه يمكن أن نأخذ الحـد الاعلـى في اليسار ، ونجد بذلك (م٤) •

١-٢-٣ الفضاء l^p ، فضاء المتتاليات لهلبرت l^2 ، متباينتا هولدر ومنكوفسكي فـي المجاميـع

ليكن p عددا حقيقيا مثبتا أكبر من 1 أو يساويه • نعرف كل عنصر مـن الفضاء l^p بأنه متتاليه $x=(\xi_j)=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ من الاعداد بحيث تكون المتسلسلة $|\xi_1|^p+|\xi_2|^p+\cdots$ متقاربة • اذن

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p<\infty \tag{1}$$

(حيث p عدد مثبت أكبر من 1 أو يساويه) • ويعرف المترك بالمساواة

$$d(x, y)=\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j-\eta_j|^p\right)^{1/p} \tag{2}$$

حيث $y=(\eta_j)$ و $\sum|\eta_j|^p<\infty$ • واذا أخذنا المتتاليات الحقيقية فقط [التي تحقق (1)] ، فاننا نجد **الفضاء الحقيقي** l^p • أما اذا أخذنا المتتاليات العقدية [التي تحقق (1)] ، فاننا نجد **الفضاء العقدي** l^p • (عنـدما يكون التمييز ضروريا ، فيمكن ان نضيف الى l^p الدليل السفلي **R** في الحالة الاولى أو الدليل السفلي **C** في الحالة الثانية) •

وفي الحالة $p=2$ ، فاننا نجد فضاء المتتاليات لهلبرت l^2 ، حيث يحـدد المتـرك بالمسـاواة

$$d(x, y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j-\eta_j|^2}. \tag{3}$$

وقد أورد هذا الفضاء ودرسه ده هلبرت (١٩١٢) لدى بحثه للمعادلات التكاملية ، ويمثل هذا الفضاء أول الامثلة على ما نسميه الآن **بفضاء هلبرت** . (سنتناول فضاءات هلبرت بتفصيل زائد ، بدءا من الفصل الثالث) .

سنثبت الآن أن l^p هو فضاء متري . من الواضح أولا أن (2) تحقق الموضوعات من (م١) حتى (م٣) شريطة تقارب المتسلسلة في الطرف الايمن . سنثبت أن هذه المتسلسلة تتقارب فعلا ، وأن (م٤) محققة ، وسنقوم بهذا العمل خطوة خطوة ، وذلك بأن نستنتج

(آ) المتباينة المساعدة ،
(ب) متباينة هولدر من (آ) ،
(جـ) متباينة منكوفسكي من (ب) ،
(د) متباينة المثلث (م٤) من (جـ) .

والتفاصيل هي كالتالي :

(آ) ليكن p عددا أكبر من 1 ، ولنعرف q بالمساواة

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{4}$$

يسمى p و q عندئذ **اسين مترافقين** ، وهو مصطلح متعارف عليه . نستنتج من (4) أن

$$1=\frac{p+q}{pq}, \qquad pq=p+q, \qquad (p-1)(q-1)=1. \tag{5}$$

وبالتالي فان $1/(p-1)=q-1$ ، اذن

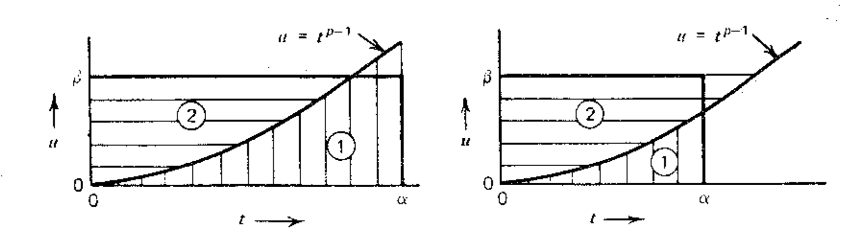
$$u=t^{p-1} \quad \text{تقتضي} \quad t=u^{q-1}$$

ليكن α و β أي عددين موجبين . لما كان $\alpha\beta$ هو مساحة المستطيل الوارد

في الشكل (٥) ، فاننا نجد بالمكاملة المتباينة

$$\alpha\beta \leqq \int_0^\alpha t^{p-1}\,dt + \int_0^\beta u^{q-1}\,du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{6}$$

لاحظ أن هذه المتباينة صحيحة وضوحا عندما $\alpha = 0$ أو عندما $\beta = 0$ •



الشكل (٥) • المتباينة (6) ، حيث ① يوافق التكامل الايسر في (6) ، و ② يوافق التكامل الايمن

(ب) لتكن $(\bar{\xi}_j)$ و $(\bar{\eta}_j)$ متتاليتين تحققان الشرطين

$$\sum |\bar{\xi}_j|^p = 1, \qquad \sum |\bar{\eta}_j|^q = 1. \tag{7}$$

اذا وضعنا $\alpha = |\bar{\xi}_j|$ و $\beta = |\bar{\eta}_j|$ ، فاننا نستنتج من (6) المتباينة

$$|\bar{\xi}_j \bar{\eta}_j| \leqq \frac{1}{p} |\bar{\xi}_j|^p + \frac{1}{q} |\bar{\eta}_j|^q.$$

وباجراء الجمع بالنسبة لـ j والافادة من (7) و (4) ، نجد المتباينة

$$\sum |\bar{\xi}_i \bar{\eta}_i| \leqq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{8}$$

لنأخذ الآن أي متتاليتين غير صفريتين $x=(\xi_j)\in l^p$ و $y=(\eta_j)\in l^q$ ،

$$\tilde{\xi}_j=\frac{\xi_j}{\left(\sum|\xi_k|^p\right)^{1/p}}, \qquad \tilde{\eta}_j=\frac{\eta_j}{\left(\sum|\eta_m|^q\right)^{1/q}}. \tag{9}$$

عندئذ تكون (7) محققة ، وبالتالي من الممكن استخدام (8) • وبتعويض (9) في (8) وضرب المتباينة الناتجة بجداء المقامين في (9) ، فاننا نجد **متباينة هولدر للمجاميع :**

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leqq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{1/q} \tag{10}$$

حيث $p>1$ و $1/p+1/q=1$ • وقد توصل هولدر الى هذه المتباينة عام ١٨٨٩ •
وفي الحالة $p=2$ ، يكون $q=2$ ، وعندها تعطى (10)
متباينة كوشي ـ شفارتز للمجاميع :

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leqq\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^2}. \tag{11}$$

من السابق لأوانه الحديث المستفيض عن الحالة $p=q=2$ ، التي يساوي فيها p مرافقه الاسي q ، بيد أننا نود على الاقل ايراد ملاحظة مختصرة تفيد بأن هذه الحالة ستلعب دورا خاصا في بنود من الفصول القادمة ، وتقود الى فضاء لهلبرت « أظرف » من تلك الفضاءات حيث يكون $p\neq2$ •

(جـ) سنثبت الآن صحة **متباينة منكوفسكي للمجاميع :**

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{1/p}\leqq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^p\right)^{1/p} \tag{12}$$

حيث $x=(\xi_j)\in l^p$ و $y=(\eta_j)\in l^p$ و $p\geqq1$ • وقد توصل منكوفسكي الى هذه المتباينة ، لكن في حالة المجاميع المنتهية ، في عام ١٨٩٦ •

في الحالة $p=1$ ، فان هذه المتباينة تنتج رأسا من متباينة المثلث بالنسبة للاعداد • لنفترض الآن $p>1$ •ولتبسيط الدســاتير، سنفترض $\xi_j+\eta_j=\omega_j$ • ان متباينة المثلثفي حال الاعداد تعطي

$$|\omega_j|^p=|\xi_j+\eta_j||\omega_j|^{p-1}$$
$$\leqq(|\xi_j|+|\eta_j|)|\omega_j|^{p-1}.$$

وبالجمع بالنسبة الى j من 1 الى أي عدد مثبت n نجد أن

$$\sum|\omega_j|^p\leqq\sum|\xi_j||\omega_j|^{p-1}+\sum|\eta_j||\omega_j|^{p-1}. \tag{13}$$

وبتطبيق متباينة هولدر على المجموع الاول فيالطرف الايمن نجد أن

$$\sum|\xi_j||\omega_j|^{p-1}\leqq\left[\sum|\xi_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum(|\omega_m|^{p-1})^q\right]^{1/q}$$

مع ملاحظة أنه يمكن أن نضع في المضروب الايمن p بدلا من جداء الاسين $p-1$ و q ، ذلك أن $pq=p+q$ كما هو واضح في (5) • واذا تعاملنا مع الطرف الايمن في (13) بصورة مماثلة ، فاننا نجد أن

$$\sum|\eta_j||\omega_j|^{p-1}\leqq\left[\sum|\eta_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum|\omega_m|^p\right]^{1/q}.$$

وبالتالي فاننا نستنتج أن

$$\sum|\omega_j|^p\leqq\left\{\left[\sum|\xi_k|^p\right]^{1/p}+\left[\sum|\eta_k|^p\right]^{1/p}\right\}\left(\sum|\omega_m|^p\right)^{1/q}.$$

وبالتقسيم على المضروب الاخير في الطرف الايمــن مــن المتباينة وملاحظة أن $1-1/q=1/p$ ، فاننا نجد (12) لكن n تــرد عوضا عــن ∞ • لنجعل الآن $n\longrightarrow\infty$ • عندها نجــد في اليمــين متسلسلتين متقاربتين لان $x,y\in l^p$ • اذن فالمتسلسلة في اليسار تتقارب أيضا ، وبذا يتم اثبات (12) •

(د) يترتب على (12) أنه اذا كان x و y في l^p ، فان المتسلسلة في (2)

تتقارب . كذلك ، فان (12) تعطي متباينة المثلث ، ذلك أنه اذا كانت x و y و z من l^p ، وكتبنا $z=(\zeta_j)$ ، فاننا نجد بالاستعانة بمتباينة المثلث بالنسبة للاعداد وبالمتباينة (12) أن

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p} \\ &\leqq \left(\sum [|\xi_j - \zeta_j| + |\zeta_j - \eta_j|]^p\right)^{1/p} \\ &\leqq \left(\sum |\xi_j - \zeta_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |\zeta_j - \eta_j|^p\right)^{1/p} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

وبذا يكتمل اثبات أن l^p هو فضاء متري .

ان المتباينتين (10) و (12) اللتين وجدناهما في سياق البرهان بالغتا الاهمية، كما وأنهما تشكلان أداتين لا غنى عنهما في العديد من المسائل النظرية والعملية ، وسنستخدمهما مرات عدة في أبحاثنا القادمة .

مسائل

١ ــ أثبت أنه يمكننا الحصول في 1.2-1 على مترك آخر عند الاستعاضة عن $1/2^j$ ، بالعدد $\mu_j>0$ بحيث تتقارب المتسلسلة $\sum\mu_j$.

٢ ــ بيّن باستخدام (6) أن الوسط الهندسي لعددين موجبين لا يكبر وسطهما الحسابي .

٣ ــ أثبت أن متباينة كوشي ــ شفارتز (11) تقتضي المتباينة

$$(|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|)^2 \leqq n(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2).$$

٤ ــ **(الفضاء l^p)** . أوجد متتالية تتقارب من 0 دون أن تكون منتمية الى أي فضاء l^p ، حيث $1\leqq p<+\infty$.

٥ ــ أوجد متتالية x منتمية الى l^p ، حيث $p>1$ ، ولا تنتمي الى l^1 •

٦ ــ **(القطر ، المجموعة المحدودة)** • **ان القطر** $\delta(A)$ لمجموعة غير خالية A في فضاء متري (X, d) يعرف بأنه

$$\delta(A)=\sup_{x,y\in A} d(x, y).$$

ونقول عن A انها **محدودة** اذا كان $\delta(A)<\infty$ • بيّن أنه اذا كان $A\subset B$ فــان $\delta(A)\leqq\delta(B)$ •

٧ ــ بيّن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\delta(A)=0$ (راجع المسألة رقم ٦) هو أن تكون A مجموعة وحيدة العنصر •

٨ ــ **(المسافة بين المجموعات)** • تعرف المسافة $D(A, B)$ بين مجموعتين غــير خاليتين A و B في فضاء متري (X, d) بالمساواة

$$D(A, B)=\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} d(a, b).$$

بيّن بأن D لا تعين متركا على مجموعة أجزاء X • (لهذا السبب استعملنا رمزا آخر D ، ولكنه رغم ذلك يذكرنا بالمترك d)•

٩ ــ اذا كان $A\cap B\neq\phi$ ، فبيّن أن $D(A, B)=0$ في المسألة ٨ • ماذا يمكن قوله عــن العكــس ؟

١٠ــ تعرّف المسافة $D(x, B)$ بين النقطة x والمجموعة غير الخالية B في (X, d) بالمســاواة

$$D(x, B)=\inf_{b\in B} d(x, b),$$

التي تتفق مع المسألة ٨ • بيّن أنه أيا كان العنصران x و y من X فان

$$|D(x, B)-D(y, B)|\leqq d(x, y).$$

١١ـ اذا كان (X, d) أي فضاء متري ، فأثبت أن المساواة

$$\bar{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

تحدد متركا آخر على X ، وأن X محدودة في المترك $\bar{d}$ •

١٢ـ بيّن أن اجتماع مجموعتين محدودتين A و B في فضاء متري هو مجموعة محدودة (راجع التعريف الوارد في المسألة ٦) •

١٣ـ **(جداء فضاءين متريين)** • من الممكن جعل الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2$ لفضاءين متريين (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاء متريا (X, d) بأشكال مختلفة • فمثلا، برهن أن المساواة التالية تعين متركا d

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

حيث $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ •

١٤ـ أثبت أنه يمكن تعريف مترك آخر على X في المسألة ١٣ بالمساواة

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}.$$

١٥ـ بيّن أنه يمكن تحديد مترك ثالث على X في المسألة ١٣ بالمساواة

$$\tilde{\tilde{d}}(x, y) = \max [d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)].$$

(ان للمتركين في المسألتين ١٣ و ١٥ أهمية تطبيقية ، كما أنه يمكن تزويد X بمتارك أخرى) •

١ـ٣ المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة ، الجوار

هنالك عدد لابأس به من المفاهيم المساعدة التي تلعب دورا فيما يتعلق بالفضاءات المترية • وقد ضمّنّا هذا الفصل تلك المفاهيم التي سنحتاج اليها •

لذا ، فان هذا الفصل يحوي مفاهيم كثيرة (أكثر من أي فصل آخر في الكتاب) ، لكن القارىء سيلاحظ أن العديد منها يغدو مألوفا تماما لدى تطبيقها على الفضاءات الاقليدية . وبالطبع فان هذا يناسبنا جدا ، كما وأنه يبين فائدة المصطلحات التي أوحت بها الينا الهندسة التقليدية .

سنورد أولا الأنماط الهامة من المجموعات الجزئية من فضاء متري معطى $X = (X, d)$.

١-٣-١ تعريف (الكرة والقشرة الكروية)

لتكن x_0 نقطة ما من X ، وليكن r عددا حقيقيا موجبا ما . لنعرف الانماط الثلاثة التالية من المجموعات الجزئية :

(آ) $B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ **(كرة مفتوحة)**

(ب) $\bar{B}(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqq r\}$ **(كرة مغلقة)**

(جـ) $S(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ **(قشرة كروية)**

وفي هذه الحالات جميعا ، فان x_0 **هو المركز** و r هو **نصف القطر** .

نرى من هذا أن الكرة المفتوحة التي نصف قطرها r هي مجموعة كل النقاط من X التي تكون المسافة بين كل منها ومركز الكرة أصغر من r . كذلك ، فان التعريف السابق يقتضي مباشرة أن

$$S(x_0; r) = \bar{B}(x_0; r) - B(x_0; r). \quad (2)$$

تحذير :

عند البحث في الفضاءات المترية ، فان من المفيد جدا استعمال المصطلحات المشابهة لتلك التي ترد في الهندسة الاقليدية . بيد أن علينا الاحتراس من خطر افتراض أن الكرات والقشرات الكروية في فضاء متري كيفي تتمتع بنفس خواص الكرات والقشرات الكروية في $\mathbf{R}^3$ ، لان الامر ليس كذلك . فمثلا قد تكون

الكرة خالية • كذلك ، ففي الفضاء المتقطع ١ــ١ــ٨ لدينا $S(x_0; r) = \varnothing$ ، عندمــا $r \neq 1$ • (ماذا يمكن قوله عن القشرات الكروية التي نصف قطرها 1 في هذه الحالة ؟) هذا ، وسنورد خواص غير عادية أخرى في أبحاثنا اللاحقة •

سننتقل الآن الى مفهومين آخرين يرتبطان فيما بينهما •

١ــ٣ــ٢ تعريف (المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها **مفتوحة** اذا حوت كرة حول كل نقطة فيها • ونقول عن مجموعة جزئية K من X انها **مغلقــة** اذا كانت متممتها (في X) مفتوحة ، أي اذا كانت المجموعة $K^c = X - K$ مفتوحة •

سيرى القارىء بوضوح استنادا الى هذا التعريف أن الكرة المفتوحة هــي مجموعة مفتوحة ، وأن الكرة المغلقة هي مجموعة مغلقة •

وغالبــا مــا تسمى الكــرة المفتوحة $B(x_0; \varepsilon)$ التــي نصف قطــرها ε **الجوار**-ε **للنقطة** x_0 • (هنا يكون $\varepsilon > 0$ وفق التعريف ١ــ٣ــ٣) • ونطلــق اســم **الجوار** للنقطة x_0 على كل مجموعة جزئية من X تحــوي جــوارا -ε للنقطــة x_0 •

نستنتج مباشرة من هذا التعريف أن أي جــوار للنقطة x_0 يحوي x_0 ، وبعبارة أخرى ، فان x_0 هي نقطة من كل جوار لها • واذا كان N جوارا للنقطة x_0 ، وكان $N \subset M$ ، فان M جوار أيضا للنقطة x_0 •

نقول عن x_0 انها **نقطة داخلية** من المجموعــة M في X اذا كان M جوارا للنقطة x_0 • ويعرف **داخــل** M بأنه مجموعة كل النقاط الداخلية من M ، ونرمز له بـ M^0 أو $\text{Int}(M)$ ، ولكن لا وجود لرمز متفق عليه تماما • ان $\text{Int}(M)$ هي مجموعة مفتوحة ، وهي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في M •

وليس من العسير اثبات أن جملة كل المجموعات المفتوحة في X ، ولتكن $\mathcal{T}$ ، تحقق الخواص التالية :

(ط۱) $\emptyset \in \mathcal{T}$ و $X \in \mathcal{T}$ ،

(ط۲) اجتماع أي عناصر من $\mathcal{T}$ هو عنصر من $\mathcal{T}$ ،

(ط۳) تقاطع أي عدد منته من عناصر $\mathcal{T}$ هو عنصر من $\mathcal{T}$ •

البرهـان :

ان (ط۱) تنتج بملاحظة أن $\emptyset$ مفتوحـة لان $\emptyset$ لاتحوي عناصر ، وإن X مفتوحة وضوحا • لنثبت صحة (ط۲) • ان كل نقطة من الاجتماع U لمجموعات مفتوحة تنتمي الى واحدة (على الاقل) من هذه المجموعات ، ولتكن M ، كما أن M تحوي كرة B حول x لكون M مفتوحة • لـذا فان $B \subset U$ وفـق تعريف الاجتماع • وهذا يثبت صحة (ط۲) • وأخيرا ، فاذا كانت y أي نقطة من تقاطع المجموعات المفتوحة $M_1, \cdots, M_n$ ، فان كلا من M_j تحوي كرة حول y ، وأصغر هذه الكرات محتواة في التقاطع ، الامر الذي يثبت صحة (ط۳) •

ونذكر هنا بأن الخواص (ط۱) ـ (ط۳) هي جد أساسية ، حتى أننـا سنعيدها في اطار أوسع • ونعني بهذا أننا سنعرف **الفضاء الطبولوجي** $(X, \mathcal{T})$ بأنه مجموعة X مزودة بجماعة $\mathcal{T}$ من المجموعات الجزئية مـن X بحيث تحـقق الموضوعات (ط۱) حتى (ط۳) • تسمى الجماعة $\mathcal{T}$ **طبولوجيا على** X• نستنتج مـن هذا التعريف ما يلي :

الفضاء المتري هو فضاء طبولوجي •

وتلعب المجموعات المفتوحة دورا كذلك لـدى دراسة التطبيقات المستمرة ، حيث يشكل الاستمرار تعميما طبيعيا للاستمرار الذي قابلناه في بحوث الحساب التفاضلي والتكاملي ، والذي نعرفه كما يلي •

۱ـ۳ـ۳ تعريف (التطبيقات المستمرة)

ليكـن $X = (X, d)$ و $Y = (Y, \tilde{d})$ فضاءين متريين • نقـول عـن تطبيـق $T: X \longrightarrow Y$ انه مستمر في النقطة x_0 من X اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد

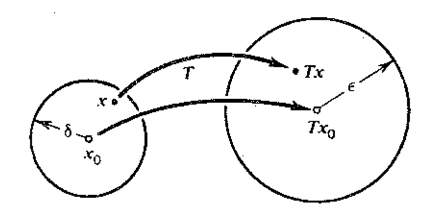
موجب δ بحيث يكون (انظر الشكل ٦)

$$\tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

أيا كانت النقطة x التي تحقق الشرط

$$d(x, x_0) < \delta.$$

ونقول عن T انه مستمر اذا كان مستمرا في كل نقطة من X •



الشكل (٦) • يوضح هذا الشكل المتباينتين السابقتين في الفضاءين الاقليديين
$Y = \mathbf{R}^2$ **و** $X = \mathbf{R}^2$

من المهم والمفيد معا معرفة أنه يمكن وصف التطبيقات المستمرة بدلالة المجموعات المفتوحة على النحو التالي :

١ـ٣ـ٤ مبرهنة (التطبيق المستمر)

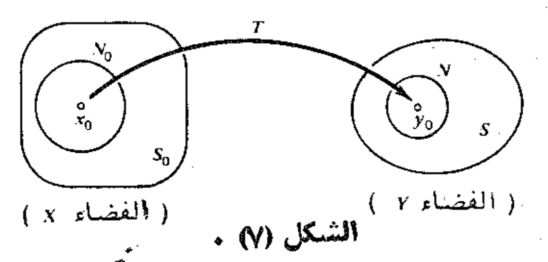
الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق T لفضاء متري X في فضاء متري Y مستمرا هو أن يكون الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة في Y (وفق T) مجموعة مفتوحة في X •

البرهان :

(آ) لنفترض أن T مستمر ، وأن S مجموعة جزئية مفتوحة من Y ، وأن S_0 الخيال العكسي لـ S • فاذا كانت S_0 خالية ، فانها مفتوحة • لنفترض $S_0 \neq \varnothing$ • فاذا كان x_0 عنصرا من S_0 ، فاننا نضع $y_0 = Tx_0$ • وبما أن S مفتوحة

فانها تحوي جوارا ε ، وليكن N، للنقطة y_0 ، انظـر الشكل (٧) • وبما أن T مستمر فانه يوجد للنقطة x_0 جوار δ ، وليكن N_0 ، بحيث يكون خياله N • وبما أن $N \subset S$ ، فان $N_0 \subset S_0$ ، وبالتالي فـان S_0 مجموعة مفتوحة لان x_0 نقطـة اختياريـة في S_0 •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X • عندئذ يكون الخيال العكسي S_0 لكل كرة مفتوحة N مركزها Tx_0 ونصف قطرها ε مجموعة مفتوحة ، وذلك لكون N مجموعة مفتوحة ولكون S_0 حاوية لـ x_0 • لذا فان S_0 تحوي جوارا δ للنقطة x_0 وليكن N_0 خياله محتوى في N ، وذلك لان خيال S_0 محتوى في N •



الشكل (٧) •

وبالتالي ، فاننا نستنتج استنادا الى التعريف أن T مستمر في النقطة x_0 • ولمـا كانت النقطة x_0 اختيارية ، فان T تطبيق مستمر •

سنورد الآن مفهومين آخرين ، يرتبط أحدهما بالآخر • لتكن M مجموعـة جزئية من فضاء متري X • تسمى النقطة x_0 من X (التي قد تنتمي الى M وقد لا تنتمي اليهـا) **نقطة تراكم** للمجموعة M (أو **نقطة حديـة** للمجموعة M) اذا حوى كل جوار للنقطة x_0 نقطة واحدة على الاقل y مـن M مغايرة للنقطة x_0 • وتسمى المجموعة المؤلفة من نقاط M ومن نقاط التراكم للمجموعة M **لصاقـة** M ، ويرمز للصاقة بالشكل

$$\bar{M}.$$

وهذه المجموعة هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي M •

سنورد كذلك خاصة أخرى غير مألوفة للكرات في فضاء متري • ففي حين

تكون اللصاقة $\overline{B(x_0; r)}$ للكـــرة المفتوحة $B(x_0; r)$ في $\mathbf{R}^3$ هي الكرة المغلقـة $\bar{B}(x_0; r)$ ، فان هذا الامر قد لا يصح في الفضاءات المترية العامـة • وتترك للقارىء التحقق من صحة هذا الامر بايراده أحد الامثلة •

سنستخدم مفهـوم اللصاقة كـي نورد الآن تعريفا ذا أهمية خاصة فـي أبحاثنـا القادمـة •

١ـ٣ـ٥ تعريف (المجموعة الكثيفة ، الفضاء الفصول)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها كثيفة في X اذا كان

$$\bar{M} = X.$$

ونقول عن X انه **فصول** اذا حوى مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في X •

يترتب على هذا أنه اذا كانت M كثيفة في X ، فان أي كرة مهما كانت صغيرة في X ستحوي نقاطا من M • وبعبارة أخرى ، فلا يمكن في هذه الحالة أن توجد نقطة x في X لها جوار غير حاوٍ على نقاط من M •

سنرى فيما بعد أن الفضاءات الفصولة أبسط الى حد ما من الفضاءات غير الفصولة • وسنورد فيما يلي بعض الامثلة الهامة على فضاءات فصولة ، وأخرى غير فصولة ، وذلك بهدف ادراك بعض المفاهيم الاساسية بصورة أفضل •

أمثلـة

١ـ٣ـ٦ المحور الحقيقي R • المحور الحقيقي R فصول

البرهـان :

ان هذا ناتج عن أن مجموعة الاعداد العادية **Q** هي مجموعة عدودة وكثيفة فـي **R** •

١ــ٣ــ٧ المستوي العقدي C • المستوي العقدي فصول .

البرهــان :

يعود السبب في هذا الى أن مجموعة الاعداد العقدية التي أقسامها الحقيقية وأقسامها التخيلية أعداد عادية هي مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في C •

١ــ٣ــ٨ الفضاء المتري المتقطع

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتري المتقطع X فصولا هو أن تكــون X عــدودة •

البرهــان :

ان تعريف المترك المتقطع (١ــ١ــ٨) يقتضي بألا تكون أي مجموعة جزئية محتواة تماما في X مجموعة كثيفــة في X • وبالتالي فان المجموعة الكثيفــة الوحيدة في X هي X نفسها ، الامر الذي يعني صحة الدعوى •

١ــ٣ــ٩ الفضاء l^∞ • الفضاء l^∞ غير فصول (١ــ١ــ٦)

البرهــان :

لتكن $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots)$ متتالية كل من عناصرها اما 1 واما 0 • عندئــذ يكون $y \in l^\infty$ • لنقرن بالمتتالية y العدد الحقيقي $\hat{y}$ الذي تمثيله الثنائي هو

$$\frac{\eta_1}{2^1}+\frac{\eta_2}{2^2}+\frac{\eta_3}{2^3}+\cdots.$$

فاذا أدخلنا في اعتبارنا أن مجموعة نقاط الفترة $[0,1]$ غير عدودة ، وأن لكــل عدد $\hat{y}$ من $[0,1]$ تمثيلا ثنائيــا ، وان للاعــداد المختلفة $\hat{y}$ تمثيلات ثنائيــة مختلفة ، فاننا نستنتج وجود مجموعة غير عدودة من المتتاليات التي عناصر كــل منها اما 1 واما 0 • ويبين المترك على l^∞ أن المسافة بين أي متتاليتين مختلفتين من هذا الفضاء يجب أن تكون مساوية للواحد • فاذا جعلنا كلا من هذه المتتاليات

مركزا لكرة صغيرة نصف قطرها $1/3$ مثلا ، فان هذه الكرات لا تتقاطع ، وبالتالي فاننا نجد مجموعة غير عدودة منها . واذا كانت M أي مجموعة كثيفة في l^∞ ، فان كلا من هذه الكرات المتقاطعة يحوي عنصرا مـــن M، لذا فلا يمكن أن تكون M عدودة . وبما أن M مجموعة عدودة اختيارية ، فاننا نستنتج أن l^∞ لايمكن أن يحوي مجموعات كثيفة بحيث تكون هذه المجموعات عدودة . لذا فان l^∞ غــير فصـــول .

١-٣-١٠ الفضاء l^p . الفضاء l^p ، حيث $1 \leqq p < +\infty$ ، فصول (١-٢-٣)

البرهـــان :

لتكن M مجموعة كل المتتاليات y التي هي من الشكل

$$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, 0, 0, \cdots)$$

حيث n أي عدد صحيح موجب ، وحيث الاعداد η_i عادية . من الواضح أن M عدودة . سنبين الآن أن M كثيفة في l^p . لهذا نفترض أن $x = (\xi_j) \in l^p$ عنصر ما . عندئذ يوجد لكل عـــدد موجب تماما ε عـــدد صحيح موجب n (تابع لـ ε) بحيـــث يكـــون

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

وذلك لان الطرف الايسر من هذه المتباينة هو باقي متسلسلة متقاربة . ولما كانت مجموعة الاعداد العادية كثيفة في $\mathbf{R}$ ، فانه يوجد لكل ξ_j عدد عادي η_j قريب منه . لذا فيمكننا ضمان وجود عنصر y من M يحقق الشرط

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

يترتب على هذا أن

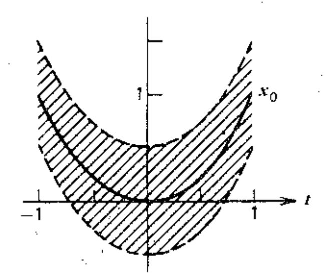
$$[d(x, y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p.$$

لـــذا نجـــد أن $d(x, y) < \varepsilon$ ، وبالتالي فاننا نرى أن M كثيفة في l^p •

مســائل

١ ـــ برز استعمالنا لمصطلحي « الكرة المفتوحة » و « الكرة المغلقة » وذلــك باثبات أن : (آ) كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة ، (ب) كل كرة مغلقة هي مجموعة مغلقة •

٢ ـــ ما هي الكـــرة المفتوحة $B(x_0; 1)$ في $\mathbf{R}$ ؟ وما هي في $\mathbf{C}$ ؟ (١ـــ١ـــ٥) • ما هي هذه الكرة في $C[a, b]$ ؟ (١ـــ١ـــ٧) • اشرح الشكل (٨) •



الشكل (٨) • المنطقة الحاوية على بيانات الدوال x المنتمية الى $C[-1, 1]$ والتي تشكل الجوار ε ، حيث $\varepsilon = 1/2$ ، للدالة x_0 من $C[-1, 1]$ ، بفرض أن $x_0(t) = t^2$

٣ ـــ لنأخذ الفضاء $C[0, 2\pi]$ • عيّن أصغر عدد r بحيث يكون $y \in \tilde{B}(x; r)$ ، بفرض أن $x(t) = \sin t$ و $y(t) = \cos t$ •

٤ ـــ بيّن أن الشرط اللازم والكافي كي تكون كل مجموعة غير خالية A فـــي فضاء متري (X, d) مفتوحة هو أن تكون اجتماعا لكرات مفتوحة •

٥ ـــ من المهم أن ندرك بأن بعض المجموعات قد تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحـــد • (آ) بين أن هذا صحيح دوما في المجموعتين X و $\varnothing$ • (ب) أثبت

أنه اذا أخذنا فضاء متريا متقطعا X (١ــ١ــ٨) فان كل مجموعة جزئية فيه مفتوحة ومغلقة معا •

٦ ــ اذا كانت x_0 نقطة تراكم في مجموعة $A \subset (X, d)$ ، فبين أن أي جوار للنقطة A تحوي عددا غير منته من نقاط A •

٧ ــ صف لصاقة كل من المجموعات الجزئية التاليــة : (آ) مجموعة الاعــداد الصحيحة في $\mathbf{R}$ • (ب) مجموعة الاعداد العادية في • (جـ) مجموعــة الاعداد العقدية التي أقسامها الحقيقية والتخيلية أعداد عادية • (د) القرص $\{z \mid |z| < 1\} \subset \mathbf{C}$ •

٨ ــ بيّن أن اللصاقة $\overline{B(x_0; r)}$ لكرة مفتوحة $B(x_0; r)$ في فضاء متري يمكــن أن تكون مختلفة عن الكرة المغلقة $\tilde{B}(x_0; r)$ •

٩ ــ أثبت أن $A \subset \bar{A}, \bar{\bar{A}} = \bar{A}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

١٠ــ اذا كانت x نقطة ليست منتمية الــى مجموعة مغلقة M في (X, d) ، فــان المسافة بين النقطة والمجموعة لا تساوي الصفر • لاثبات هــذا ، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{A}$ هو أن يكون $D(x, A) = 0$ (راجع المسألة ١٠ من البند ١ــ٢) • ان A هنا هي أي مجموعة جزئية غير خالية فــي X •

١١ــ **(الجبهة او الحد)** • نقول عن نقطة x انها **نقطة جبهية** لمجموعة A في (X, d) اذا كانت x نقطة من X (قد تنتمي الى A أو لا تنتمي اليها) بحيث يحوي أي جوار لـ x نقاطا من A ونقاطا لا تنتمي الى A • وتسمى مجموعة النقاط الجبهية لـ A جبهة (أو حد) A • حدد جبهة كل مــن المجموعات التالية : (آ) الفترات $(-1, 1)$ و $[-1, 1)$ و $[-1, 1]$ في $\mathbf{R}$ • (ب) مجموعة الاعداد العادية في $\mathbf{R}$ • (جـ) القرص $\{z \mid |z| < 1\} \subset \mathbf{C}$ والقرص $\{z \mid |z| \leqq 1\} \subset \mathbf{C}$ •

١٢ــ **(الفضاء $B[a, b]$)** • بيّن أن الفضاء $B[a, b]$ ، حيث $a < b$ ، غــير فصــول (١ــ٢ــ٢) •

١٣ــ بيّن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء متري X فصولا هــو أن يوجد في X مجموعة جزئية عدودة Y تتمتع بالخاصة التالية : يوجد لكــل عدد موجب تماما ε ولكل عنصر x من X عنصر y من Y بحيث يكــون $d(x, y) < \varepsilon$ •

١٤ــ **(التطبيق المستمر)** • أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \longrightarrow Y$ مستمرا هو أن تكون الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقــة M في Y مجموعة مغلقة في X •

١٥ــ بيّن أن صورة المجموعة المفتوحة وفــق تطبيق مستمر ليســت بالضرورة مجموعــة مفتوحــة •

١ــ٤ التقارب ، متتالية كوشي ، التمام

نحن نعلم بأن متتاليات الاعــداد الحقيقية تلعب دورا هامــا في الحساب التفاضلي والتكاملي ، وأن المترك على $\mathbf{R}$ هو الذي يمكننا مــن تعريف المفهــوم الاساسي لتقارب هذه المتتاليات • ان هذا الكلام يسري على متتاليات الاعــداد العقــدية كذلك ، ذلك أننا نستعمل في هذه الحالة المترك المعرف على المستوي العقدي • ان الامــور تسير بصورة مماثلة في حالــة الفضاءات المترية العامــة $X = (X, d)$ ، أي أننا هنا نأخذ متتالية (x_n) من العناصر $x_1, x_2, \cdots$ في X ، ونستعمل المترك d بهدف تعريف التقارب بصورة مشابهة لما فعلناه في الحساب التفاضلي والتكاملي •

١ــ٤ــ١ تعريف (تقارب المتتاليات • النهاية)

نقول عن متتالية في فضاء متري $X = (X, d)$ انها **متقاربة** اذا وجد عنصر x من X بحيث يكون

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

تسمى x **نهايــة** المتتالية (x_n) ، ونكتب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

أو

$$x_n \longrightarrow x.$$

وعندئذ نقول بأن (x_n) **تتقارب** من x ، أو إن x **نهاية المتتالية** (x_n) • واذا لم تكن (x_n) متقاربة ، قلنا انها **متباعــدة** •

كيف يستعمل المترك d في هذا التعريف ؟ نحن نرى بأن d تعطي متتالية من الاعداد الحقيقية $a_n = d(x_n, x)$ ، بحيث أن تقاربها يعرف تقارب المتتالية (x_n) • يترتب على هذا أنه اذا كان $x_n \longrightarrow x$ ، وكان $\varepsilon > 0$ عددا معطى ، فانه يوجــد عدد صحيح موجب $N = N(\varepsilon)$ بحيث أن جميع العناصر x_n ، حيث $n > N$ ، تقع في الجوار ε للنقطة x (أي في $B(x; \varepsilon)$) •

ولتجنب سوء فهم قد يحدث ، فاننا نلاحظ أن نهايــة متتالية متقاربة يجب يجب أن يكون نقطة من الفضاء X في ١ــ٤ــ١ • لنفترض مثلا أن X هو الفترة المفتوحة $(0, 1)$ في $\mathbf{R}$ المزودة بالمترك المألوف المعرف بالمساواة $d(x, y) = |x - y|$ • عندئذ لاتكون المتتالية $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots)$ متقاربة ، ذلــك أن النقطة 0 التي « تــود المتتالية أن تتقارب منها » ليست واقعة في X • وسنعود الى هذا الموضوع والى مواضيع مشابهة في البند الحالي •

لنبين أولا أن خاصتيين مألوفتين للمتتاليات المتقاربة (وهما وحدانية النهاية والمحدودية) تنتقلان من الفضاء $\mathbf{R}$ الى الفضاءات المترية العامة •

نقول عن مجموعة جزئية M في X انها مجموعة **محدودة** اذا كان **قطرها**

$$\delta(M) = \sup_{x, y \in M} d(x, y)$$

عددا منتهيا • ونقول عن متتالية (x_n) في X انهــا **متتالية محدودة** واذا كانت المجموعة المؤلفة من حدودها مجموعة محدودة في X •

ومن الواضح أنه اذا كانت M محدودة ، فان $M \subset B(x_0; r)$ ، حيث x_0 أي نقطة في X ، و r عدد حقيقي موجب (كبير بقدر كاف) ، والعكس صحيح •

١ـ٤ـ٢ تمهيدية (المحدودية ، النهاية)

اذا كان $X=(X, d)$ فضاء متريا ، فان :

(آ) كل متتالية متقاربة في X محدودة ، ونهايتها وحيدة •

(ب) اذا كان $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ في X ، فان $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$ •

البرهــان :

(آ) لنفترض أن $x_n \longrightarrow x$ • لذا فانه اذا أخذنا $\varepsilon=1$ ، فاننا نتمكن من ايجاد عدد صحيح موجب N بحيث تتحقق المتباينة $d(x_n, x)<1$ ايا كان n الــذي يحقق الشرط $n>N$ • يترتب على هذا استنادا الى متباينة المثلث (م٤) من البند ١ـ١ أنه أيا كان n ، فان $d(x_n, x)<1+a$ ، حيث

$$a=\max\{d(x_1, x), \cdots, d(x_N, x)\}.$$

اذن فالمتتالية (x_n) محدودة • واذا افترضنــا أن $x_n \longrightarrow x$ و $x_n \longrightarrow z$ ، فاننــا نستنتج وفق (م٤) أن

$$0 \leqq d(x, z) \leqq d(x, x_n)+d(x_n, z) \longrightarrow 0+0$$

وعندئذ نجد الوحدانية $x=z$ للنهاية كنتيجة للخاصة (م٢) •

(ب) لدينا استنادا الى (1) من البند ١ـ١

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x)+d(x, y)+d(y, y_n).$$

لذا نجد المتباينة

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leqq d(x_n, x) + d(y_n, y)$$

ومتباينة مماثلة بالمبادلة ما بين x_n و x وما بين y_n و y ثـم بالضرب بـ -1 • ويترتب على هاتين المتباينتين أن

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leqq d(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0$$

عندمـا $n \longrightarrow \infty$ • ∎

سنحدد الآن مفهوم التمام في الفضاءات المترية ، ذلك المفهوم الذي سيكون أساسيا في أبحاثنا القادمة • وسنرى أن التمام لا ينتج عن (م١) ــ (م٤) مـن البند ١ــ١ ، ذلك أن ثمة فضاءات مترية ليست تامة • وبعبارة أخرى فان التمام هو خاصة اضافية قد يتمتع أو لا يتمتع بهـا فضاء متري • ولهذه الخاصـة نتائج مختلفة تجعـل الفضاءات التامـة « أجود وأبسط » من الفضاءات غـير التامة • وسيغدو معنى هـذا الكلام أوضح كلمـا تعمقنا في دراستنا لهـذه الفضـاءات •

لنذكر أولا أن الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية الحقيقية أو العقديـة (x_n) فـي المحـور الحقيقـي $\mathbb{R}$ أو فـي المستوي العقـدي $\mathbb{C}$ هو أن تحقق **معيار (أو رائز) تقارب كوشي** ، أي أن يوجد لكل عدد موجب تماما ε عـدد صحيح موجب $N = N(\varepsilon)$ بحيث تتحقق المتباينة

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n اللذان يحققان الشرط $m, n > N$ • ان العدد $|x_m - x_n|$ هنا يمثل المسافة $d(x_m, x_n)$ بين x_m و x_n على المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ أو في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ • لذا فمن الممكن كتابة متراجحة معيـار كوشي بالشـكل

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

ويمكن تسمية كل متتالية (x_n) تحقق شرط معيار كوشي **متتالية كوشي** . عندئذ ينص معيار كوشي ببساطة على أن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب متتالية من الاعداد الحقيقية أو الاعداد العقدية في $\mathbf{R}$ أو في $\mathbf{C}$ على الترتيب هو أن تكون هذه المتتالية هي متتالية كوشي. ان هذا الامر الذي يصح في $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ غير صحيح من سوء الحظ في فضاءات أعم ، اذ أنه قد توجد في بعض هذه الفضاءات متتاليات لكوشي دون أن تكون متقاربة . وهذه الفضاءات تعوزها خاصة هي من الاهمية لدرجة أنها تستحق ان تسمى بخاصة التمام . وقد اهاب هذا الاعتبار بفريشيه (١٩٠٦) لايراد التعريف التالي :

١-٤-٣ تعريف (متتالية كوشي ، التمام)

نقول عن متتالية (x_n) في فضاء متري $X=(X, d)$ انها **متتالية لكوشي (او متتالية اساسية)** اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب $N=N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$d(x_m, x_n)<\varepsilon \qquad (1)$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n>N$. ويقال عن الفضاء X انه **تام** اذا كانت كل متتالية لكوشي فيه متقاربة (أي اذا وجد لها نهاية منتمية الى X) . ∎

ويقتضي معيار تقارب كوشي معبرا عنه بدلالة التمام المبرهنة التالية :

١-٤-٤ مبرهنة (المحور الحقيقي ، المستوي العقدي)

ان المحور الحقيقي والمستوي العقدي هما فضاءان متريان تامان .

وبوجه أعم ، فاننا سنرى الآن مباشرة من التعريف أن الفضاءات المترية التامة هي بالضبط تلك الفضاءات التي يبقى فيها شرط كوشي (1) شرطا لازما وكافيا للتقارب .

هذا وسندرس بصورة نظامية في البند التالي تلك الفضاءات المترية التامة وغير التامة والتي تحظى بأهمية بالغة من حيث تطبيقاتها •

أما الآن فسنورد عددا قليلا من الفضاءات غير التامة البسيطة والتي يمكن الحصول عليها بسرعة • ان حذف نقطة a من المحور الحقيقي يعطينا الفضاء غير التام $\mathbf{R}-\{a\}$ • وبصورة أكثر تطرفا ، فاذا حذفنا كل الاعداد غير العادية فاننا نجد المحور العادي $\mathbf{Q}$ ،وهو فضاء غير تام • والفترة المفتوحة (a, b) المزودة بمقصور المترك المعرف على $\mathbf{R}$ توفر مثالا آخر لفضاء متري غير تام ، وهكذا •

يتضح من التعريف أن الشرط (1) في فضاء متري كيفي قد لا يكون كافيا للتقارب ذلك أن الفضاء قد يكون غير تام • ان الادراك الجيد لهذا الامر على غاية من الاهمية ، لهذا سنورد المثال البسيط التالي • لنأخذ المجموعة $X=(0, 1]$ المزودة بالمترك المألوف المعرف بالمساواة $d(x, y)=|x-y|$ ، ولنأخذ المتتالية (x_n) ، حيث $x_n=1/n$ و $n=1, 2, \cdots$ • ان هذه هي متتالية كوشي ، الا انها ليست متقاربة ، ذلك أن النقطة 0 (التي «تود المتتالية أن تتقارب منها») ليست نقطة من X • وهذا يوضح أيضا أن مفهوم التقارب ليس خاصة ذاتية للمتتالية نفسها ، بل انها تعتمد أيضا على الفضاء الذي تقع فيه المتتالية • وبعبارة أخرى ، فان المتتالية المتقاربة ليست متقاربة « كيفما اتفق » ، بل انها يجب أن تتقارب من نقطة في الفضاء •

ورغم أن الشرط (1) لا يكفي للتقارب ، فمن الجدير بالملاحظة أن يبقى شرطا لازما للتقارب ، الامر الذي تبينه المبرهنة التالية •

١ــ٤ــ٥ مبرهنة (المتتالية المتقاربة)

كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشي •

البرهان :

اذا كان $x_n \longrightarrow x$ ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب $N=N(\varepsilon)$ بحيث أن

$$d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2}$$

أيا كان العدد الصحيح " المحقق الشرط $n>N$.

يترتب على هذا استنادا الى متباينة المثلث أنه اذا كان $m, n>N$ فان

$$d(x_m, x_n) \leqq d(x_m, x)+d(x, x_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

وهذا يثبت أن (x_n) هي متتالية كوشي . ∎

سنرى أن العديد من النتائج الاساسية (في نظرية المؤثرات الخطية مثلا) تعتمد على تمام الفضاءات الواردة آنذاك . وتمام المحور الحقيقي **R** هو أيضا السبب الرئيسي الذي يجعلنا نستعمل **R** في الحساب التفاضلي والتكاملي بدلا من **المحور العادي Q** (وهو مجموعة الاعداد العادية المزودة بمقصور المترك المعرف على **R**) .

لنختتم فصلنا هذا بثلاث مبرهنات ترتبط بالتقارب والتمام ، اذ أننا نحتاج اليها في الابحاث القادمة .

١-٤-٦ مبرهنة (اللصاقة ، المجموعة المغلقة)

اذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتري (X, d) ، وكانت $\bar{M}$ لصاقتها المعرفة في البند السابق ، فان :

(آ) الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \in \bar{M}$ هو أن توجد متتالية (x_n) في M بحيث أن $x_n \longrightarrow x$.

(ب) الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو التالي : اذا كانت x_n أي متتالية من عناصر M متقاربة من x ، فان $x \in M$.

البرهان :

(آ) لنفترض أن $x \in \bar{M}$. فاذا كان $x \in M$ ، فان المتتالية $(x, x, \cdots)$ تتقارب من x . أما اذا كان $x \notin M$ ، فان x نقطة تراكم لـ M . لذا فان كل

كرة $B(x; 1/n)$ ، حيث $n=1, 2, \cdots$ ، تحوي عنصرا x_n من M • وبالتالي فان $x_n \longrightarrow x$ لان $1/n \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$ •

وبالعكس ، فاذا كانت (x_n) متتالية في M بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ ، فان $x \in M$ ، أو أن كل جوار للنقطة x يحوي نقاطا x_n مغايرة للنقطة x ، وعندها تكون x نقطة تراكم للمجموعة M • لذا فان $x \in \bar{M}$ استنادا الى تعريف اللصاقة•

(ب) لما كان الشرط اللازم والكافي كي تكون M مغلقة هو أن يكون $M=\bar{M}$ ، فان (ب) تنتج مباشرة من (آ) • ∎

١ــ٤ــ٧ (الفضاء الجزئي التام)

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي M من فضاء متري تام X فضاء تاما هو أن تكون المجموعة M مغلقة في X •

البرهان :

لنفترض الفضاء الجزئي M تاما • عندئذ نجد استنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ أنه يقابل كل x من $\bar{M}$ متتالية (x_n) في M متقاربة من x • ولما كانت (x_n) متتالية كوشي وفق ١ــ٤ــ٥ وكان M تاما ، فانه يوجد للمتتالية (x_n) نهاية في M ، وهذه النهاية وحيدة استنادا الى ١ــ٤ــ٢ • اذن $x \in M$ ، الامر الذي يبين أن M مجموعة مغلقة لان النقطة x من $\bar{M}$ كانت كيفية •

وبالعكس ، لنفترض أن M مجموعة مغلقة ، وان (x_n) متتالية لكوشي في M • عندئذ نرى أن x_n تتقارب من نقطة x في X ، الامر الذي يقتضي أن $x \in \bar{M}$ استنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ ، وان $x \in M$ لان $M=\bar{M}$ فرضا • نستنتج من هذا أن متتالية كوشي الاختيارية (x_n) تتقارب في M ، الامر الذي يثبت تمام M •

ان هذه المبرهنة بالغة الاهمية ، وسنستخدمها كثيرا في أبحاثنا المقبلة • ويتضمن المثال ١ــ٥ــ٣ في البند التالي أول تطبيق نموذجي لها •

تبين المبرهنة الاخيرة من مبرهناتنا الثلاث الحالية أهمية تقارب المتتاليات لدى بحثنا في استمرار تطبيق •

١ــ٤ــ٨ مبرهنة (التطبيق المستمر)

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \longrightarrow Y$ من فضاء متري (X, d) في فضاء متري $(Y, \tilde{d})$ مستمرا في نقطة x_0 من X هو أن يقتضي الشرط $x_n \longrightarrow x_0$ الشرط $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ •

البرهان :

لنفترض أن T مستمر في النقطة x_0 • (راجع التعريف ١ــ٣ــ٣) عندئذ يقابل العدد الموجب ε عدد موجب δ بحيث أن

$$d(x, x_0) < \delta \quad \text{يقتضي} \quad \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

لنفترض أن $x_n \longrightarrow x_0$ • عندئذ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أنه اذا كان n أي عدد صحيح يحقق الشرط $n > N$ فان

$$d(x_n, x_0) < \delta.$$

لذا فاننا نجد ن

$$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon.$$

أيا كان العدد الصحيح n الذي يحقق المتباينة $n > N$ • وهذا يعني تعريفا أن $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ •

وبالعكس ، لنفترض أن الشرط $x_n \longrightarrow x_0$ يقتضي $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ ، ولنثبت أن T يكون عندئذ مستمرا في x_0 • اذا لم نقبل بصحة هذا الامر ، فانه يوجد عدد موجب ε بحيث أنه يقابل كل عدد موجب δ عنصر x مغاير لـ x_0 بحيث يتحقق الشرط $d(x, x_0) < \delta$ ، ويكون في الوقت نفسه $\tilde{d}(Tx, Tx_0) \geqq \varepsilon$ •

وبوجه خاص ، فاذا اخترنا $\delta = 1/n$ ، فيوجد x_n بحيث يتحقق الشرط $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ ، ويكون في الوقت نفسه $\bar{d}(Tx_n, Tx_0) \geqq \varepsilon$ • ومن الواضح أنه عندئذ يكون $x_n \longrightarrow x_0$ ، الا أن (Tx_n) لا تتقارب من Tx_0 • ان هذا يناقض افتراضنا بأن $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ ويثبت صحة المبرهنة • ∎

مسائل

١ ــ **(المتتالية الجزئية)** اذا كانت متتالية (x_n) في فضاء متري X متقاربة وكانت نهايتها x ، فبين أن كل متتالية جزئية (x_{n_k}) من (x_n) تكون متقاربة، كما تكون لها النهاية x نفسها •

٢ ــ اذا كانت (x_n) متتالية كوشي ووجد لها متتالية جزئية x_{n_k} متقاربة من x ، فبين أن المتتالية (x_n) متقاربة وان لها النهاية x نفسها •

٣ ــ بيّن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \longrightarrow x$ هو أن يقابل كل جوار V للنقطة x عدد صحيح n_0 بحيث يكون $x_n \in V$ أيا كان n المحقق للشرط $n > n_0$ •

٤ ــ **(المحدودية)** أثبت أن كل متتالية لكوشي محدودة •

٥ ــ هل يكفي كون متتالية في فضاء متري محدودة كي تكون متتالية لكوشي ؟ وهل تكفي هذه المحدودية لتكون المتتالية متقاربة ؟

٦ ــ اذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين لكوشي في فضاء متري (X, d) ، فبيّن أن (a_n) ، حيث $a_n = d(x_n, y_n)$ ، متتالية متقاربة • أعط أمثلة توضيحية •

٧ ــ قدم برهانا غير مباشر على الشق (ب) من التمهيد ١ــ٤ــ٢ •

٨ ــ اذا كان d_1 و d_2 متركين على مجموعة واحدة X ، ووجد عددان موجبان a و b بحيث تتحقق المتباينة

$$a d_1(x, y) \leqq d_2(x, y) \leqq b d_1(x, y),$$

أيا كان العنصران x و y من X ، فأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية ما هي متتالية لكوشي في الفضاء (X, d_1) هو أن تكون متتالية لكوشي في الفضاء (X, d_2) •

٩ ـ أثبت بالافادة من التمرين ٨ أن الفضاءات المترية في المسألتين ١٣ و ١٥ من البند ١ـ٢ لها نفس متتاليات كوشي •

١٠ـ أثبت استنادا الى تمام الفضاء **R** أن الفضاء **C** هو فضاء تام كذلك •

١ـ٥ امثلة • براهين التمام

في العديد من التطبيقات ، تعطى أولا مجموعة X (كأن تكون مجموعة متتاليات أو مجموعة دوال أو غيرها) ، ومن ثم نصنع من هذه المجموعة فضاء متريا ، ويتم هذا بأن نختار متركا d على X • بعد هذا نبحث فيما اذا كان الفضاء الحاصل (X, d) يتمتع بخاصة كونه تاما • ولاثبات التمام ، فاننا نأخذ متتالية كيفية لكوشي (x_n) في X ، ثم نثبت أنها متقاربة في X • هذا وان البراهين تختلف في درجة تعقيدها ، بيد أننا نسلك فيها جميعا الخطوات العامة التالية :

(i) نوجد عنصرا x (يستعمل كنهاية للمتتالية) •

(ii) نثبت أن x واقع في الفضاء قيد الدرس •

(iii) نثبت أن $x_n \longrightarrow x$ (بالنسبة للمترك) •

سنقدم فيما يلي براهين التمام لبعض الفضاءات المترية التي ترد كثيرا في الابحاث النظرية والتطبيقية • وسيلاحظ القارىء أننا في هذه البراهين (كما سنرى في الامثلة بدءا من ١ـ٥ـ١ وحتى ١ـ٥ـ٥) نستعين بخاصة تمام المحور الحقيقي أو المستوي العقدي (المبرهنة ١ـ٤ـ٤) •

أمثلـــة

١ـ٥ـ١ تمام $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ • الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$ والفضاء الوحدي $\mathbf{C}^n$ تامان (١ـ١ـ٥) •

البرهـان :

لنأخذ أولا $\mathbf{R}^n$ • لقد سبق وعرفنا المترك علـى $\mathbf{R}^n$ (أي المترك الاقليدي) بالمســاواة

$$d(x, y)=\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)^2\right)^{1/2}$$

حيث $x=(\xi_j)$ و $y=(\eta_j)$ (راجع (٦) مـن البند ١ـ١) • لنأخذ أيـة متتالية لكوشي (x_m) في $\mathbf{R}^n$ ، حيث $x_m=(\xi_1^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})$ • لما كانت (x_m) متتالية لكوشي ، فانه يقابل كل عدد موجب ε عـدد صحيح موجب N بحيث يكـون

$$d(x_m, x_r)=\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)})^2\right)^{1/2}<\varepsilon \qquad (m, r>N). \tag{1}$$

ونجد بعد التربيع أنه عندما يكون $m, r>N$ و $j=1, \cdots, n$ فان

$$(\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)})^2<\varepsilon^2 \qquad \text{و} \qquad |\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(r)}|<\varepsilon.$$

ويبين هذا أنه يقابل كلّ قيمة مثبتة لـ j $(1\leqq j\leqq n)$ المتتالية $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ التي هي متتالية لكوشي من الاعداد الحقيقية • واستنادا الى المبرهنة ١ـ٤ـ٤ ، فان هذه المتتالية تتقارب ، ولنفترض مثــلا أن $\xi_j^{(m)}\longrightarrow\xi_j$ عندما $m\longrightarrow\infty$ • سنعرف باستخدام هذه النهايات التي عددها n العنصر $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ • نلاحظ بوضوح أن $x\in\mathbf{R}^n$ وأنه يترتب على (1) عند جعل $r\longrightarrow\infty$ أن

$$d(x_m, x)\leqq\varepsilon \qquad (m>N).$$

يبين هذا أن x هي النهاية للمتتالية (x_m) ، وهذا يثبت تمام $\mathbf{R}^n$ لان (x_m) كانت متتالية كيفية لكوشي • أما تمام $\mathbf{C}^n$ ، فينتج عن المبرهنة ١ــ٤ــ٤ باتباع الاسلوب ذاته في البرهان •

١ــ٥ــ٢ تمام l^∞ • الفضاء l^∞ تام (١ــ١ــ٦)

البرهــان :

لتكن (x_m) أي متوالية لكوشي في الفضاء l^∞ ، حيث $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$ لما كان المترك على l^∞ محددا بالمساواة

$$d(x, y) = \sup_j |\xi_j - \eta_j|$$

[حيث $x = (\xi_j)$ و $y = (\eta_j)$] ، وكانت (x_m) متتالية كوشي . فانه يقابل كــل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$d(x_m, x_n) = \sup_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon.$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $(m, n > N)$ • يترتب عــلى هذا مباشرة أنه اذا كان j أي عدد صحيح موجب مثبت ، فان

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \qquad (m, n > N). \tag{2}$$

لذا فان المتتالية $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$ أيا كان العدد المثبت j هي متتالية عددية لكوشي• وبالتالي فانها تتقارب استنادا الى المبرهنة ١ــ٤ــ٤ • لنفترض مثلا أن $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • وبأخــذ هــذه النهايات جميعــا $\xi_1, \xi_2, \cdots$ فاننــا سنعرف $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ • سنبــين الآن $x \in l^\infty$ وأن $x_m \longrightarrow x$ • نستنتج مــن (2) عندمــا $n \longrightarrow \infty$ أن

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leqq \varepsilon \qquad (m > N). \tag{2*}$$

بما أن $x_m = (\xi_j^{(m)}) \in l^\infty$ ، فيوجد عدد حقيقي k_m بحيث يكون $|\xi_j^{(m)}| \leqq k_m$ أيا كان j • لذا يترتب على متباينة المثلث أن

$$|\xi_j| \leqq |\xi_j - \xi_j^{(m)}| + |\xi_j^{(m)}| \leqq \varepsilon + k_m \qquad (m > N).$$

لما كانت هذه المتباينة صحيحة أيا كان j ، وكان الطرف الايمن لايحوي j ، فان (ξ_j) متتالية محدودة من الاعداد • وبالتالي فان $x = (\xi_j) \in l^\infty$ • كذلك ، فاننا نجد من (2*) أن

$$d(x_m, x) = \sup_j |\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leqq \varepsilon \qquad (m > N).$$

وهذا يبين أن $x_m \longrightarrow x$ • وبما أن (x_m) متتالية كيفية لكوشي . فان l^∞ فضاء تام •

١ـ٥ـ٣ تمام الفضاء c •

يتألف الفضاء c من كل المتتاليات المتقاربة $x = (\xi_j)$ من الاعداد العقدية والمزودة بمقصور المترك المعرف على l^∞ •

ان الفضاء c تام

البرهان :

ان c فضاء جزئي من l^∞ • فاذا أثبتنا أن c مغلق في l^∞ ، فاننا نستنتج تمام c استنادا الى المبرهنة ١ـ٤ـ٧ •

لنأخذ عنصرا اختياريا $x = (\xi_j) \in \bar{c}$ ، حيث $\bar{c}$ لصاقة c • عندها نجد اعتمادا على الشق (آ) من ١ـ٤ـ٦ أن هنالك متتالية $x_n = (\xi_j^{(n)}) \in c$ بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ • وبالتالي فانه يقابل العدد الموجب ε عدد صحيح موجب N بحيث أنه أيا كان n الذي يحقق الشرط $n \geqq N$ وأيا كان j فان

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j| \leqq d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3},$$

وبوجه خاص فان هذا يتحقق عندما $n=N$ أيا كان j • وبما أن $x_N \in c$ ، فان حدوده $\xi_j^{(N)}$ تشكل متتالية متقاربة ، وهذه المتتالية هـي متتالية كوشي • اذن هنالك عدد صحيح موجب N_1 بحيث يكون

$$|\xi_j^{(N)} - \xi_k^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (j, k \geqq N_1).$$

وعندئذ يترتب على متباينة المثلث أنه اذا كان $j, k \geqq N_1$ ، فاننا نجد المتباينـة التاليـة

$$|\xi_j - \xi_k| \leqq |\xi_j - \xi_j^{(N)}| + |\xi_j^{(N)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_k| < \varepsilon.$$

وهذا يثبت أن المتتالية $x=(\xi_j)$ متقاربة ، الامر الذي يترتب عليه أن $x \in c$ • ولما كان العنصر $x \in \bar{c}$ اختياريا ، فان c مغلقة في l^∞ • وعندئذ نستنتج تمام الفضاء c بالعودة الى المبرهنة ١ـ٤ـ٧ • ∎

١ـ٥ـ٤ تمـام الفضاء l^p •

الفضاء l^p تام ، حيث نفترض p عددا مثبتا بحيث أن $1 \leqq p < +\infty$ (راجع ١ـ٢ـ٣) •

البرهـان :

لتكن (x_n) متتالية ما لكوشي في الفضاء l^p ، حيث $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots)$ • عندئذ يوجد لكل عـدد موجـب ε عـدد صحيح موجب N بحيث تصـح المتباينـة

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n > N$ •

يترتب على هذا أنه أيا كان العدد الصحيح الموجب j ، فان

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon \qquad (m, n>N). \tag{4}$$

لِنَخْتَر عددا مثبتا j • نستنتج من (4) أن$(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \cdots)$متتالية عددية لكوشي، وبالتالي فانها متقاربة نظرا لكون الفضاءين $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ تامين (١ـ٤ـ٤) • لنفترض مثلا أن $\xi_j^{(m)} \longrightarrow \xi_j$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • عندئذ يمكننا ان نستخدم هذه النهايات لتعريف العنصر $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$ ، ومن ثم اثبات أن $x \in l^p$ وان $x_m \longrightarrow x$ •

نستنتج من (3) أنه اذا كان m, n أي عددين صحيحين يحققان الشرط $m, n>N$ فـان

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|^p<\varepsilon^p \qquad (k=1, 2, \cdots).$$

وبجعل $n \longrightarrow \infty$ ، فاننا نجد بفرض $m>N$ أن

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p \leqq \varepsilon^p \qquad (k=1, 2, \cdots).$$

يمكننا الآن جعل $k \longrightarrow \infty$ • عندها نجد بفرض $m>N$ أن

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)}-\xi_j|^p \leqq \varepsilon^p. \tag{5}$$

ان هذا يبين أن $x_m-x=(\xi_j^{(m)}-\xi_j)\in l^p$ • وبما أن $x_m \in l^p$ ، فانه يترتب علـى متباينة منكوفسكي (12) من البند ١ـ٢ أن

$$x=x_m+(x-x_m)\in l^p.$$

وفضلا عن ذلك ، فان المتسلسلة في (5) تمثل $[d(x_m, x)]^p$ ، وهذا يعني أن(5)

تقتضي بأن يكون $x_m \longrightarrow x$ • ولما كانت (x_m) متتالية اختيارية لكوشي ، فان هذا يثبت تمام الفضاء l^p ، حيث $1 \leqq p < +\infty$ • ∎

١ــ٥ــ٥ تمام الفضاء $C[a, b]$ •

ان الفضاء الدالي $C[a, b]$ تام ، حيث $[a, b]$ أي مجال مغلــق في $\mathbf{R}$ • (راجــع ١ــ١ــ٧) •

البرهــان :

لتكن (x_m) متتالية كيفية لكوشي فــي $C[a, b]$ • لذا فاذا أعطينا عددا موجبــا ε ، فانــه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أنه أيا كان العــددان الصحيحان m, n اللذان يكبران N فاننا نجد

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{6}$$

حيث $J = [a, b]$ • لذا فاننا نجد عند تثبيت $t = t_0 \in J$ أن

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

وهذا يبين أن $(x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots)$ هي متتالية عدديــة لكوشي • وبما أن $\mathbf{R}$ تــام (١ــ٤ــ٤) ، فــان هــذه المتتاليــة لابــد أن تتقــارب • لنفترض مثــلا أن $x_m(t_0) \longrightarrow x(t_0)$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • يمكننا بهذه الطريقة أن نقابل كــل عنصر $t \in J$ بعدد حقيقي وحيد $x(t)$ ، وهذا يقود الى تعريف دالة x (نقطيا) على J • سنبين الآن أن $x \in C[a, b]$ وأن $x_m \longrightarrow x$ •

نرى أنه عندما $n \longrightarrow \infty$ في (6) فان

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leqq \varepsilon \qquad (m > N).$$

لذا نجد المتباينة التالية أيا كان $t \in J$

$$|x_m(t)-x(t)|\leqq \varepsilon \qquad (m>N).$$

وهذا يبين أن $(x_m(t))$ تتقارب من $x(t)$ بانتظام على J . ولما كانت الدوال x_m مستمرة على J وكان التقارب على J منتظما ، فان دالة النهاية x مستمرة على J ، كما هو معروف (راجع المسألة ٩) . اذن فان $x\in C[a, b]$. واذا لاحظنا أن $x\in C[a, b]$ فاننا نكون قدبرهنا على تمام الفضاء $C[a, b]$. ∎

لقد افترضنا هنا ، كما سبق وفعلنا في ١ـ١ـ٧ ، أن الدالة x حقيقية ،وذلك بقصد التبسيط . لذا يمكننا القول عن الفضاء $C[a, b]$ بأنه **حقيقي** . وبصورة مماثلة ، فاننا نجد الفضاء العقدي $C[a, b]$ اذا أخـذنا الدوال العقدية المستمرة المعرفة على $[a, b]\subset \mathbb{R}$. ان هذا الفضاء تام كذلك ، الامر الذي يمكن التثبت منه بالطريقة نفسها تقريبا .

وفضلا عن ذلك ، فان البرهان يبين صحة الحقيقة التالية :

١ـ٥ـ٦ مبرهنة (التقارب المنتظم)

ان التقارب $x_m \longrightarrow x$ في الفضاء $C[a, b]$ هو تقارب منتظم ، اي ان المتتالية (x_m) تتقارب بانتظام على $[a, b]$ من x .

لذا فان المترك على $C[a, b]$ يحدد تقاربا منتظما على $[a, b]$ ، ولهذا السبب فانه يطلق على هذا المترك أحيانا اسم **المترك المنتظم** .

وللتوصل الى فهم جيد للتمام ولمفاهيم أخرى ترتبط به ، فاننا سنورد في الختام بعض الامثلة .

امثلة على الفضاءات المترية غير التامة

١ـ٥ـ٧ الفضـاء Q

وهو الفضاء المؤلف من مجموعة الاعداد جميعا Q المزودة بالمترك المألوف المحدد بالمساواة $d(x, y)=|x-y|$ ، حيث $x, y\in Q$. يسمى هـذا الفضاء **المحور العادي Q** وهو ليس تاما . (لماذا ؟)

١ـهـ٨ الحدوديات

لتكن X مجموعة كل الحدوديات التي نعتبرها دوال للمتغير t على مجال مغلق محدود $J=[a, b]$ ، ولنعرف متركا على X بالمساواة

$$d(x, y) = \max_{t\in J} |x(t) - y(t)|.$$

ان هذا الفضاء (X, d) ليس تاما • وفي الحقيقة ، فان هـذا يتضح اذا أخذنا متتالية لكوشي عناصرها حدوديات بحيث تكون متقاربة بانتظام على J من دالة مستمرة ليست حدوديا ، وبالتالي لا تنتمي الى X •

١ـهـ٩ الدوال المستمرة

لتكن X مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على $J=[0, 1]$ ، ولنفترض أن

$$d(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt.$$

سنثبت الآن أن هذا المترك غير تام •

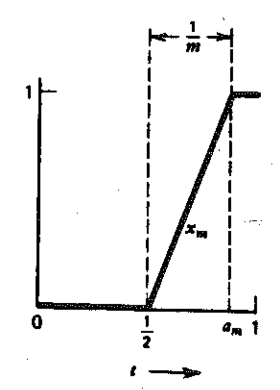
البرهـان :

ان الدوال x_m في الشكل (٩) تشكل متتالية كوشي ، ذلـك أن العـدد $d(x_m, x_n)$ ليس سوى مساحة المثلث في الشكل (١٠) ، وأنه اذا كان ε عـددا موجبـا فـان

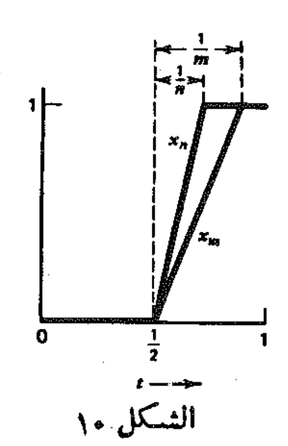
$$d(x_m; x_n) < \varepsilon \quad \text{عندمـا} \quad m, n > 1/\varepsilon$$

لنبين أن متوالية كوشي هذه ليست متقاربة • لدينا

$x_m(t) = 0$ عندما $t\in[0, \frac{1}{2}]$ ، $x_m(t) = 1$ عندما $t\in[a_m, 1]$ •



الشكل ٩



الشكل ١٠

حيث $a_m = 1/2 + 1/m$ • لذا نجد أنه اذا كان x أي عنصر من X فان

$$d(x_m, x) = \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{1/2} |x(t)|\, dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{a_m}^{1} |1 - x(t)|\, dt.$$

ولما كانت الدالتان المكاملتان سالبتين ، فان كلا من التكاملات الواردة في الطرف الايمن يكون كذلك • وبالتالي فان $d(x_m, x) \longrightarrow 0$ يقتضي أن يقترب كل من هذه التكاملات الى الصفر • وبما أن x مستمرة ، فيجب أن نجد

$x(t) = 0$ عندما $t \in [0, \frac{1}{2})$ و $x(t) = 1$ عندما $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ •

ولما كان هذا امرا غير ممكن بالنسبة لدالة مستمرة ، فان (x_m) ليست متقاربة ، أي أنه لايوجد لها نهاية في X • وهذا يثبت أن X غير تام • ∎

مسائل

١ ـ ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث يكون $a<b$ • أثبت أن الفترة

المفتوحة (a, b) هي فضاء جزئي غير تام من $\mathbb{R}$ ، في حين أن الفترة المغلقة $[a, b]$ تامـة ٠

٢ ــ ليكن X فضاء كل المرتبات n مـن الاعـداد الحقيقيـة $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ، ولنفترض أن

$$d(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|$$

حيث $y=(\eta_i)$ ٠ أثبت أن (X, d) فضاء تام ٠

٣ ــ ليكن M فضاء جزئيا من l^∞ مؤلفا من كل المتتاليات $x=(\xi_i)$ التي حدود كل منها أصفار جميعا باستثناء عدد منته من هذه الحدود على الاكثر ٠ أوجد متتالية لكوشي في M غير متقاربة في M ، الامر الذي يبين أن M غير تام ٠

٤ ــ أثبت أن الفضاء الجزئي M الوارد في المسألة ٣ غير تام ، وذلك بتطبيق المبرهنة ١ــ٤ــ٧ ٠

٥ ــ أثبت أن مجموعة كل الاعـداد الصحيحة X المزودة بالمتـرك d المعـرف بالمساواة $d(m, n)=|m-n|$ تشكل فضاء متريا تاما ٠

٦ ــ بيّن أن مجموعة كل الاعداد الحقيقية المزودة بالمترك d المحدد بالمساواة

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|.$$

تشكل فضاء متريا غير تام ٠

٧ ــ لتكن X مجموعة كل الاعداد الصحيحة الموجبـة و $d(m, n)=|m^{-1}-n^{-1}|$ ٠ أثبت أن (X, d) فضاء غير تام ٠

٨ ــ **(الفضاء $C[a, b]$)** أثبت أن الفضاء انجزئي Y من $C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال $x \in C[a, b]$ المحققة للشرط $x(a)=x(b)$ هو فضاء غير تام ٠

٩ ــ لقد ذكرنا في ١ــ٥ــ٥ المبرهنة التالية التـي ترد عادة في مبادىء التحليل

الرياضي : « اذا كان تقارب متتالية (x_n) من الدوال المستمرة المعرفة على $[a, b]$ تقاربا منتظما على $[a, b]$ من الدالة x ، فان دالة النهاية x هذه مستمرة على $[a, b]$ » برهن على صحة هذه النظرية •

١٠ــ (**المترك المتقطع**) • أثبت أن الفضاء المتري المتقطع (١ــ١ــ٨) هو فضاء تام •

١١ــ (**الفضاء s**) • •أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \longrightarrow x$ في الفضاء المتري s (١ــ٢ــ١) هو أن يكون $\xi_j^{(n)} \longrightarrow \xi_j$ أيا كان العدد الصحيح الموجب j ، وذلك بفرض أن $x_n = (\xi_j^{(n)})$ وان $x = (\xi_j)$ •

١٢ــ أفد من المسألة السابقة ١١ كي تثبت أن فضاء المتتاليات s في ١ــ٢ــ١ هو فضاء تام •

١٣ــ أثبت أنه اذا أخذنا الفضاء الوارد في ١ــ٥ــ٩ ، فان المتتالية (x_n) حيث

$$x_n(t) = n \quad \text{عندما} \quad 0 \leqq t \leqq n^{-2} \quad ، \quad x_n(t) = t^{-\frac{1}{2}} \quad \text{عندما} \quad n^{-2} \leqq t \leqq 1$$

هي متتالية لكوشي في هذا الفضاء •

١٤ــ بيّن أن متتالية كوشي الواردة في المسألة ١٣ غير متقاربة •

١٥ــ ليكن X الفضاء المتري المؤلف من كل المتتاليات الحقيقية $x = (\xi_j)$ التي حدود كل منها اصفار جميعا باستثناء عدد منته من هذه الحدود على الاكثر ، بفرض أن $d(x, y) = \sum |\xi_j - \eta_j|$ حيث $y = (\eta_j)$ • لاحظ أن هذا مجموع منته الا أن عدد الحدود المجموعة يتعلق بـ x و y • أثبت أن المتتالية (x_n) حيث

$$\xi_j^{(n)} = j^{-2} \quad \text{عندما} \quad j = 1, \cdots, n \quad \text{و} \quad \xi_j^{(n)} = 0 \quad \text{عندما} \quad j > n$$

هي متتالية كوشي ، وهذه المتتالية ليست متقاربة •

١ــ٦ اتمام الفضاءات المترية

من المعلوم أن المحور العادي **Q** غير تام (١ــ٥ــ٧) ، الا أنه يمكن « توسيعه » الى المحور الحقيقي **R** الذي هو فضاء تام ، بحيث أن هذا « الاتمام »

ل الى $\mathbb{R}$ يجري بصورة يكون بها $\mathbb{Q}$ كثيفا في $\mathbb{R}$ (١ـ٣ـ٥) • ومـن المهم جدا معرفة أن أي فضاء متري غير تام يمكن « اتمامه » بصورة مماثلة ، الامـر الذي سنراه الآن • واذا رغبنا في صياغة مناسبة ودقيقة لهذا « الاتمام » ، فاننا نورد تعريف المفهومين التاليين ، المرتبط أحدهما بالآخر ، واللذين لهما تطبيقات مختلفة أخرى •

١ـ٦ـ١ تعـريف (التطبيـق الايزومتري) (متساوي المسـافة) ، الفضاءات الايزومترية (متساوية المسافة) •

ليكن $X=(X, d)$ و $\tilde{X}=(\tilde{X}, \tilde{d})$ فضاءين متريين عندئذ :

(آ) نقول عن تطبيق T للفضاء X في الفضاء $\tilde{X}$ انه **إيزومتري (متساوي المسافة)** اذا حافظ على T على المسافة ، بمعنى أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فان

$$\tilde{d}(Tx, Ty)=d(x, y),$$

حيث Tx و Ty خيالا x و y على الترتيب •

(ب) نقول عن الفضاء X انه **إيزومتري (متساوي المسافة)** مع الفضاء $\tilde{X}$ ، إذا وجد تطبيق ايزومتري متباين وغامـر من X على $\tilde{X}$ • وعندئذ نقول عن الفضاءين X و $\tilde{X}$ انهما **فضاءان ايزومتريان (متساويا المسافة)** • ∎

لذا فالفضاءان الايزومتريان قد يختلفان على الاكثر بطبيعة عناصرهما ، بيد أنه لا يمكن تمييز أحدهما عن الآخر من وجهة نظر المترك • وبالتالي ، فانه يمكن اعتبار الفضاءين الايزومتريين متطابقين في أي دراسة لا تدخل في اعتبارها طبيعة عناصرهما ، وكأن هذين الفضاءين نسختان من الفضاء « المطلق » نفسه •

بعد هذا يمكننا الآن صياغة واثبات المبرهنة التي تفيد بأن كل فضاء متري يمكن اتمامه • ويدعى الفضاء الناتـج $\hat{X}$ في هـذه المبرهنة **الاتمـام** للفضـاء المعطـى X •

١-٦-٢ مبرهنة (الاتمام) • يوجد لكل فضاء متري $X=(X,d)$ فضاء متري تام $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ يحوي فضاء جزئيا W ايزومتريا مع X وكثيفا في $\hat{X}$ • ان هذا الفضاء $\hat{X}$ وحيد اذا غضضنا الطرف عن الفضاءات الايزومترية معه ، بمعنى انه اذا كان $\tilde{X}$ اي فضاء متري تام يحوي فضاء جزئيا كثيفا $\tilde{W}$ ايزومتريا مع X ، فان الفضاءين $\tilde{X}$ و $\hat{X}$ ايزومتريان •

البرهـان :

ان البرهان مطول لكن مباشر ، وسنجزئه الـى أربع خطوات على النحـو التـالي :

(آ) نجد الفضاء $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ •

(ب) ننشيء تطبيقا ايزومتريا لـ T على X ، حيث $\bar{W}=\hat{X}$ •

ومن ثم نبرهن على

(جـ) تمام الفضاء $\hat{X}$ •

(د) وحدانية $\hat{X}$ ، بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه •

وتتلخص مهمتنا تقريبا في تحديد نهايات مناسبة لمتتاليات لكوشي في X بحيث تكون هذه المتتاليات غير متقاربة • هذا ، ولن نورد عددا « كبيرا جدا » من النهايات بل ندخل في اعتبارنا بـأن هنالك متتاليات معينة « قد ترغب في التقارب من النهاية نفسها » لان حدود هذه المتتاليات « تقترب بصورة كيفيـة احدها من الآخر » •

ان هذه الفكرة الحدسية يمكن أن يعبر عنها رياضيا بدلالة علاقـة تكافؤ مناسبة [انظر المساواة (1) في الاسفل] • ان هذا الامر ليس بالمصطنع ، ولكننا نستوحيه من عملية اتمام المحور العادي التي أتينا على ذكرها في بداية هذا البند • أما تفاصيل البرهان فهي كما يلي :

(آ) **ايجاد الفضاء** $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ لتكن (x_n) و (x_n') متتاليتين لكوشي في X • سنقول ان (x_n) **تكافـيء** (x_n') ، ونكتب $(x_n)\sim(x_n')$ اذا تحقق الشرط

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n') = 0. \tag{1}$$

لتكن $\hat{X}$ مجموعة كل صفوف التكافؤ $\hat{x}$ ، $\hat{y}$ ، ••• لمتتاليات كوشي الناتجة • سنعني بكتابتنا $(x_n)\in\hat{x}$ أن (x_n) عنصر من $\hat{x}$ (وهو ممثل للصف $\hat{x}$) • لنكتب الآن

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \tag{2}$$

حيث $(x_n)\in\hat{x}$ و $(y_n)\in\hat{y}$ ، وسنبين أن هذه النهاية موجودة • لدينا

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n);$$

لهذا فان

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leqq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

وبملاحظة أنه يمكننا الحصول على متباينة مماثلة بالمبادلة ما بين m و n ، فاننا نجد من هذه المتبانة والمتباينة (3) أن

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n). \tag{3}$$

ولما كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين لكوشي ، فمن الممكن جعل الطرف الايمن صغيرا بقدر ما نشاء ، الامر الذي يقتضي وجود النهاية (2) نظرا لكون الفضاء $\mathbf{R}$ تاما •

يجب أيضا اثبات أن النهاية (2) مستقلة عن الاختيار الخاص للممثل • وفي الحقيقة ، فاذا كان $(x_n)\sim(x_n')$ و $(y_n)\sim(y_n')$ ،فاننا نجد اعتمادا على (1) أن

$$|d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leqq d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n') \longrightarrow 0$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ ، الامر الذي يقتضي أن

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n').$$

سنبرهن أن $\hat{d}$ الوارد في (2) هو مترك على $\hat{X}$ • مـــن الواضح أن $\hat{d}$ يحقق الشرط (م١) من البند ١ـــ١ والشرط $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}) = 0$ والشرط (م٣) • وبالاضافة الى هذا فان

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_n) \sim (y_n) \quad \Longrightarrow \quad \hat{x} = \hat{y}$$

وبذا يتحقق الشرط (م٢) بكامله • أما الشرط (م٤) فانه ينتج من المتباينة

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

عندما نجعل $n \longmapsto \infty$ •

(ب) **انشاء التطبيق الايزومتري** $T: X \longrightarrow W \subset \hat{X}$ • لنقرن كل b من X بالصف $\hat{b}$ من $\hat{X}$ الذي يحوي متتالية كوشي الثابتة $(b, b, \cdots)$ • اننا بهـــذا نعرف تطبيقا $T: X \longrightarrow W$ على الفضاء الجزئي $W = T(X) \subset \hat{X}$ ، وهذا التطبيق هـــو $b \longmapsto \hat{b} = Tb$ ، حيث $(b, b, \cdots) \in \hat{b}$ • نـــرى أن T ايزومتري لان (2) تغدو ببساطة كما يلي :

$$\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) = d(b, c);$$

و $\hat{c}$ هنا هو صف (y_n) حيث $y_n = c$ أيا كان n • ان أي تطبيق ايزومتري متباين و $T: X \longrightarrow W$ غامر لان $T(X) = W$ • لذا فان W و X ايزومتريان (راجع (ب) من التعريف ١ـــ٦ـــ١) •

سنبين أن W كثيف في $\hat{X}$ • لنأخذ أي $\hat{x}$ من $\hat{X}$ ، ولنفترض أن $(x_n) \in \hat{x}$ • يوجد لكل عـــدد موجب ε عـــدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n > N).$$

فاذا كان $(x_N, x_N, \cdots)\in \hat{x}_N$ ، فان $\hat{x}_N\in W$ • فاذا لاحظنا أنه يترتب على (2) أن

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

فاننا نكون قد أثبتنا أن كل جوار ε للعنصر الاختياري $\hat{x}$ و $\hat{X}$ يحوي عنصرا من ، الامر الذي يعني أن W كثيف في $\hat{X}$ •

(جـ) **تمام الفضاء** $\hat{X}$ • لتكن $(\hat{x}_n)$ متتالية ما لكوشي في $\hat{X}$ • لما كان W كثيفا في $\hat{X}$ ، دانه يوجد لكل $\hat{x}_n$ عنصر $\hat{z}_n$ من W بحيث أن

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < \frac{1}{n}. \tag{4}$$

لذا فاننا نجد انطلاقا من متباينة المثلث أن

$$\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) \leqq \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n)$$
$$< \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \frac{1}{n}$$

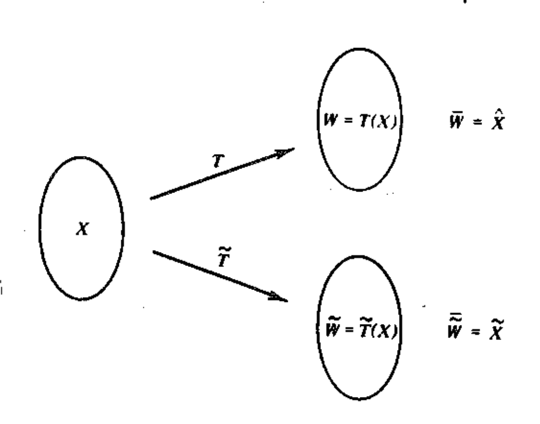
وهذا المقدار أصغر من أي عدد موجب ε عندما نأخذ m و n كبيرين بقدر كاف ، وذلك لكون $(\hat{x}_m)$ متتالية كوشي • لذا فان $(\hat{z}_m)$ متتالية لكوشي • وبما أن $T: X \longrightarrow W$ تطبيق ايزومتري ، وان $\hat{z}_m\in W$ ، فان المتتالية (z_m) ، حيث $z_m = T^{-1}\hat{z}_m$ هي متتالية كوشي في X • لنفترض أن $\hat{x}$ من $\hat{X}$ الصف الذي تنتمي اليه (z_m) ،ولنثبت أن $\hat{x}$ هو نهاية $(\hat{x}_n)$ • لدينا استنادا الى (4) ما يلي :

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) \leqq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x})$$
$$< \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}). \tag{5}$$

ولما كان $(z_m)\in \hat{x}$ (الامر الذي ذكرناه قبل قليل) وكان $\hat{z}_n\in W$ ، فان $(z_n, z_n, z_n, \cdots)\in \hat{z}_n$ ، وعندئذ تصبح المتباينة (5) على الشكل

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(z_n, z_m)$$

والطرف الايمن هنا أصغر من أي عدد موجب ε عند جعل n كبيرا بقدر كاف • وبالتالي فانه يوجد لمتتالية كوشي $(\hat{x}_n)$ الاختيارية في $\hat{X}$ النهاية $\hat{x}$ في $\hat{X}$ ، الامر الذي يترتب عليه تمام الفضاء $\hat{X}$ •



الشكل (١١) • الرموز المستعملة في الخطوة (د) من اثبات المبرهنة ١ـ٦ـ٢

(د) **وحدانية $\hat{X}$ ، بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه •** اذا كان $(\tilde{X}, \tilde{d})$ فضاء متريا تاما آخر يحوي فضاء جزئيا $\tilde{W}$ كثيفا في $\tilde{X}$ وايزومتريا مع X ، فانه يوجد لكل $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ من $\tilde{X}$ متتاليتان $(\tilde{x}_n)$ و $(\tilde{y}_n)$ في $\tilde{W}$ بحيث يكون $\tilde{x}_n \longrightarrow \tilde{x}$ و $\tilde{y}_n \longrightarrow \tilde{y}$ • لذا فان المساواة

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

تنتج من كون

$$|\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \leqq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{y}_n) \longrightarrow 0$$

[المتباينة هذه تشبه (3)] • ولما كان $\tilde{W}$ ايزومتريا مع W المحتوى من $\hat{X}$ ، وكان

$\hat{W}=\hat{X}$ ، فان المسافات على $\tilde{X}$ و $\hat{X}$ يجب أن تكون واحدة ، وهـذا يعني أن الفضاءين $\tilde{X}$ و $\hat{X}$ ايزومتريان ∎

وسنرى في الفصلين التاليين (وبخاصة في ٢ــ٣ــ٢ و ٣ــ١ــ٥ و ٣ــ٢ــ٣) أن لهذه المبرهنة تطبيقات أساسية على فضاءات منفردة غير تامة ولصفوف كاملة من مثل هذه الفضاءات •

مسائل

١ ــ بين أنه اذا كان فضاء جزئي Y مـن فضاء متري مؤلفا من عدد منته مـن النقاط ، فان Y تام •

٢ ــ ما هو الاتمام للفضاء (X, d) ، حيث X هي مجموعة كل الاعداد العاديـة و $d(x, y)=|x-y|$ ؟

٣ ــ ما هو الاتمام لفضاء متري متقطع X ؟ (راجع ١ــ١ــ٨) •

٤ ــ اذا كان X_1 و X_2 ايزومتريين وكان X_1 تاما ، فأثبت أن X_2 تام •

٥ ــ **(الهوميومورفيزم أو التصاكـل) الهوميومورفيزم** هـو تطبيـق مستمر متباين وغامر $T: X \longrightarrow Y$ كمـا أن عكسه مستمر • ويقال عندئذ عـن الفضاءين المتريين X و Y انهما **هوميومورفيان** •(آ) أثبت أنه اذا كان X و Y ايزومتريين ، فانهما هوميومورفيان • (ب) بين بايراد أحد الامثلة أن الفضاء المتري التام والفضاء المتري غير التام قد يكونا هوميومورفيين •

٦ ــ أثبت أن الفضاءين $C[0, 1]$ و $C[a, b]$ ايزومتريان •

٧ ــ اذا كان (X, d) فضاء تاما ، فبرهـن علـى أن الفضاء $(X, \tilde{d})$ ، حيـث $\tilde{d}=d/(1+d)$ ، فضاء تام كذلك •

٨ ــ أثبت أنه اذا كان الفضاء $(X, \tilde{d})$ في المسألة ٧ تاما ، فان (X, d) فضاء تـام كذلـك •

٩ ــ بين أنه اذا كانت (x_n) و (x_n') متتاليتين في (X, d) بحيث يتحقق الشرط (1) والشرط $x_n \longrightarrow l$ ، فان (x_n') تكون متقاربة ، كما تكون نهايتها l .

١٠ــ اذا كانت (x_n) و (x_n') متتاليتين متقاربتين في فضاء متري (X, d) ، وكان لهما نهاية واحدة l ، فأثبت عندئذ أنهما يحققان (1) .

١١ــ برهن على أن (1) يعرف علاقة تكافؤ على مجموعة كل متتاليات كوشي التي عناصرها في X .

١٢ــ اذا كانت (x_n) متتالية لكوشي في (X, d) ، وكانت (x_n') متتالية في X تحقق (1) ، فأثبت أن (x_n') تكون عندئذ متتالية لكوشي في X .

١٣ــ **(شبه المترك)** يعرف **شبه المترك المنتهي** على مجموعة X بأنه دالة $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق الشروط (م١) و (م٣) و (م٤) من البند ١ــ١ والشرط

$$d(x, x) = 0.$$

ما الفرق بين مترك وشبه مترك ؟ بيّن أن المساواة $d(x, y) = |\xi_1 - \eta_1|$ تعرف شبه مترك على مجموعة كل الازواج المرتبة من الاعداد الحقيقية حيث $x = (\xi_1, \xi_2)$ و $y = (\eta_1, \eta_2)$. (تجدر بنا الاشارة الى أن بعض المؤلفين يستعملون مصطلح **نصف مترك** بدلا من **شبه مترك**) .

١٤ــ هل تعرف المساواة

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt$$

متركا أو شبه مترك على X في كل الحالات التالية : (آ) X هي مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ ، (ب) X هي مجموعة كل الدوال الحقيقية والكمولة ريمانيا على $[a, b]$ ؟

١٥ـ اذا كان (X, d) فضاء شبه متري ، فاننا ندعو المجموعة

$$B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} \qquad (r > 0)$$

كرة مفتوحة في X مركزها x_0 ونصف قطرها r . (لاحـظ الشبه بين هـذا التعريف والتعريف١ـ٣ـ١) • حدد الكرات المفتوحة التي نصف قطرها 1 فـي المسـألة ١٣ •

* * *

الفصل الثاني

الفضاءات المنظمة . فضاءات باناخ

من الممكن الحصول على فضاءات مترية مفيدة وذات أهمية خاصة اذا أخذنا الفضاء المتجهي وعرفنا عليها متركا بواسطة **نظيم** ، وعندها يسمى الفضاء الناتج **فضاء منظما** . واذا كان هذا الفضاء فضاء متريا تاما ، فانه يدعى **فضاء باناخ** .
ان نظرية الفضاءات المنظمة ، وبخاصة فضاءات باناخ ، ونظرية المؤثرات الخطية المعرفة عليها هي الاكثر تطورا بين أقسام التحليل الدالي . وهذا الفصل مكرس لدراسة الافكار الاساسية في هذه النظريات .

مفاهيم هامة . توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

الفضاء المنظم (٢ـ٢ـ١) هو **فضاء متجهي** (٢ـ١ـ١) معرف عليه مترك بواسطة نظيم (٢ـ٢ـ١) ، والنظيم هو تعميم لطول متجه في المستوي أو في الفضاء ثلاثي البعد . و **فضاء باناخ** (٢ـ٢ـ١) فضاء منظم يشكل فضاء متريا تاما . ويوجد للفضاء المنظم اتمام هو فضاء باناخ (٢ـ٣ـ٢) . ويمكننا أيضا في الفضاء المنظم أن نعرف ونستعمل المتسلسلات غير المنتهية (٢ـ٣) .

يسمى كل تطبيق من فضاء منظم X الى فضاء منظم Y **مؤثرا** ، كما يسمى التطبيق من X الى الحقل العددي $\mathbb{R}$ أو C **داليا** . وللمؤثرات المسماة **مؤثرات خطية محدودة** ، كما وللداليات المسماة **داليات خطية محدودة** ، أهمية

خاصة ، ذلك أنها جميعا مستمرة وتستثمر البنية الجبرية للفضاء المتجهي • وفي الحقيقة ، فان المبرهنة ٢ــ٧ــ٩ تنص على أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي مستمرا هو أن يكون محدودا ، وهذه نتيجة أساسية • ان أهمية الفضاءات المتجهية هنا تعود بصورة رئيسية الى المؤثرات الخطية والداليات الخطية التي تحملها هذه الفضاءات •

ومن الامور الاساسية أن مجموعة كل المؤثرات الخطية المحدودة من فضاء منظم معطى X الى فضاء معطى آخر Y يمكن جعلها فضاء منظما (٢ــ١٠ــ١) يرمز له بـ $B(X, Y)$ • كذلك فان مجموعة كل الداليات الخطية المحدودة على X تصبح فضاء منظما يسمى الفضاء الثنوي X' للفضاء X (٢ــ١٠ــ٣) •

ان الفضاءات المنظمة غير منتهية الابعاد أكثر أهمية من الفضاءات منتهية الابعاد • والفضاءات الاخيرة أبسط من سابقتها (٢ــ٤ و ٢ــ٥) ، كما أن المؤثرات المعرفة عليها يمكن أن تمثل بمصفوفات (٢ــ٩) •

ملاحظة حول الرموز

سنرمز للفضاءين بـ X و Y ، وللمؤثرات بأحرف لاتينية كبيرة (ويفضل الحرف T) ، ولصورة عنصر x وفق T بـ Tx (دون قوسين) ، وللداليات بأحرف لاتينية صغيرة (ويفضل الحرف f) ، ولقيمة f في نقطة x بـ $f(x)$ (بقوسين) • وهذه الرموز تستعمل بصورة واسعة •

٢ــ١ الفضاء المتجهي

تشغل الفضاءات المتجهية مركزا مرموقا في العديد من فروع العلوم الرياضية وتطبيقاتها • وفي الحقيقة ، فاننا نستعمل في كثير من المسائل التطبيقية (والنظرية) مجموعة X قد تكون عناصرها متجهات في فضاء ثلاثي البعد أو دوال أو متتاليات عددية ، وهذه العناصر يمكن جمعها أو ضربها بثوابت (عددية) بطريقة طبيعية ، حيث تكون النتيجة عنصرا من X كذلك • ان مثل هذه الحالات توحي بمفهوم الفضاء المتجهي الذي سنعرفه في الفقرة التالية • وسيحوي التعريف حقلا عاما K ،

الا أن هذا الحقل يؤخذ في التحليل الدالي إمـا R واما C • وتسمى عناصر K **مقادير عددية** ، وبالتالي فانها في حالتنا هذه أعداد حقيقية أو أعداد عقدية •

٢ـ١ـ١ تعريف (الفضاء المتجهي)

الفضـاء المتجهـي (أو الفضـاء الخطـي) عـلى حقـل K هـو مجموعـة غـير خاليـة X من العناصـر x و y و •• (**تدعـى متجهـات**) . وهـذه المجموعـة مـزودة بعمليتـين جبريتـين • تدعـى هاتـان العمليتـان **جمعا متجهيا وضرب متجهات بأعداد** ، أي بعناصر من K •

ان **الجمع المتجهي** يقرن بكل زوج مرتب (x, y) من المتجهات متجها $x+y$ يدعى **مجموع** x و y بحيث يكون هـذا الجمـع تبادليا وتجميعيا ، أي بحيث تتحقق المساواتان

$$x+y=y+x$$

$$x+(y+z)=(x+y)+z;$$

أيا كانت المتجهات x و y و z • كذلك يجـب أن يوجـد متجـه 0 يدعـى **المتجه الصفري** ، وأن يوجد لكل متجه x متجه $-x$ بحيث تتحقق المساواتان

$$x+0=x$$

$$x+(-x)=0.$$

أيا كان المتجه x •

أما **ضرب المتجه بعدد** ، فيقرن بكل متجه x متجها αx (يرمز له أيضا بـ $x\alpha$) ويدعى **جـداء** α و x بحيث تتحقق المساواتان

$$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

$$1x=x$$

وبحيث يصح القانونان التوزيعيان

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$$

أيا كان المتجهان x و y وأيا كان العددان α و β •

نرى من التعريف أن الجمع المتجه هـو تطبيق $X\times X\longrightarrow X$ ، في حين أن الضرب بعدد هو تطبيق $K\times X\longrightarrow X$ •

يسمى K الحقل **العددي** (أو حقل **المعاملات**) للفضاء المتجهي X، كما يسمى X **الفضاء المتجهي الحقيقي** اذا كان $K=\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ هـو حقل الاعداد الحقيقية) ، أو **الفضاء المتجهي العقـدي** اذا كان $K=\mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ هو حقل الاعداد العقدية) •

ان استعمالنا للرمز 0 للدلالة على العدد 0 وعلى الشعاع الصفري في آن واحد ، يجب أن لا يؤدي الى ارباك في الحالة العامة • وإذا رغبنا فيوضوح أكبر، فيمكننا أن نرمز للصفر المتجه بـ θ •

ونترك للقارىء البرهان على صحة ما يلي أيا كان المتجه x وأيا كان العدد α

$$0x=\theta \tag{1a}$$

$$\alpha\theta=\theta \tag{1b}$$

and

$$(-1)x=-x. \tag{2}$$

امثلـة

٢ــ١ــ٢ الفضـاء $\mathbf{R}^n$

هذا الفضاء هو الفضاء الاقليدي الذي أوردناه في ١ــ١ــ٥ • وهو مؤلف من مجموعة كل المرتبات n مـن الاعـداد الحقيقيـة مثـل $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ، $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ ، الخ • وهذه المجموعة مزودة بالعمليتين الجبريتين المعرفتـين بالطريقة المألوفة التالية

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \cdots, \xi_n + \eta_n)$$
$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_n) \qquad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

من الواضح أن هذا الفضاء هو فضاء خطي حقيقي •

والامثلة التالية هي من طبيعة مماثلة ، ذلك أننا في كل منها سنعرف فضاء متجهيا انطلاقا من فضاء سبق ورأيناه •

٢ــ١ــ٣ الفضــاء $\mathbf{C}^n$

لقد عرفنا هذا الفضاء في ١ــ١ــ٥ ، وهو مؤلف من مجموعة كل المرتبات من الاعداد العقدية مثل $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ ، الــخ ، حيث تعرف العمليتان الجبريتان على هذه المجموعة كما فعلنا في المثال السابق ، الا أننا نفترض هنا أن $\alpha \in \mathbf{C}$ •

٢ــ١ــ٤ الفضــاء $C[a, b]$

لقد سبق وعرفنا هذا الفضاء في ١ــ١ــ٧ • ان كل نقطة مــن هذا الفضاء هي دالة حقيقية مستمرة على $[a, b]$ • ان مجموعة كل هذه الدوال تشكل فضاء متجهيا حقيقيا لدى تزويدها بعمليتين جبريتين معرفتين على النحو التالي

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$
$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \qquad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

وفي الحقيقة ، فإن $x+y$ و αx همــا دالتانحقيقيتان مستمرتان معرفتان عــلى $[a, b]$ عندما تكون x و y دالتين حقيقيتين ويكون α عددا حقيقيا •

من فضاءات الدوال المتجهية الهامة الاخرى نورد (آ) الفضاء المتجهي $B(A)$ في ١ــ٢ــ٢ ب (ب) الفضاء المتجهي لكــل الدوال القضولة عــلى $\mathbf{R}$ ، (جـ) الفضاء المتجهي لكل الدوال الحقيقية على $[a, b]$ والكمولة ريمانيا أو بمعنى آخر •

أوردنا هــذا الفضاء في ١ــ٢ــ٣ ، وهــو فضاء متجهي عملياته الجبريتان معرفتان بالطريقة التالية

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots) + (\eta_1, \eta_2, \cdots) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots)$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots).$$

وفي الحقيقة ، فاذا كان $x = (\xi_j) \in l^2$ و $y = (\eta_j) \in l^2$ ، فان $x + y \in l^2$ ، الامر الذي ينتج مباشرة من متباينة مينكوفسكي (12) في البنــد ١ــ٢ • كذلــك مــن الواضــح أن $\alpha x \in l^2$ •

من الفضاءات الاخرى التي نقاطها متتاليات الفضاء l^∞ الوارد في ١ــ١ــ٦ ، والفضاء l^p الوارد في ١ــ٢ــ٣ ، حيث $1 \leqq p < +\infty$ ، والفضاء s في ١ــ٢ــ١ •■

الفضاء الجزئي من فضاء متجهي X هو مجموعة جزئية غير خالية Y من X بحيث نجد أنه أيا كان $y_1, y_2 \in Y$ وأيا كان العددان α و β ، فان $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ • لذا فان Y نفسه هو فضاء متجهي عملياته هما مقصورا العمليتين المعرفتين على X •

من الفضاءات الجزئية الخاصة من X هو **الفضاء الجزئي غير الفعلي** $Y = X$ • وكل فضاء جزئي آخر من $X\ (\neq\{0\})$ يسمى **فضاء جزئيا فعليا** •

كذلك ، فهنالك فضاء جزئي خاص آخر من أي فضاء متجهي X هو $Y = \{0\}$ •

يعرف **التركيب الخطي** للمتجهات $x_1, \cdots, x_m$ من الفضاء المتجهي X بأنــه عبارة من الشكل

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

حيث تمثل المعاملات $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ أي أعداد •

واذا كانت M أي مجموعة جزئية غير خالية من X ، فان مجموعة كل التراكيب الخطية لمتجهات M تسمى مَوَلّد M ، ونرمز لها بالشكل

$$\text{span } M.$$

ومن الواضح أن هذا فضاء جزئي X من Y ، وعندئذ نقول بأن Y **مولد** بالمجموعة M •

سنقدم الآن مفهومين هامين مرتبط أحدهما بالآخر • وسنستعمل هذين المفهومين مرارا وتكرارا في أبحاثنا القادمة •

٢ـ١ـ٦ تعريف (الاستقلال الخطي ، الارتباط الخطي)

يعرف الاستقلال والارتباط الخطي لمجموعة M من المتجهات $x_1, \cdots, x_r$ $(r \geqq 1)$ في فضاء متجهي X عن طريق المعادلة

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0, \qquad (3)$$

حيث $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ أعداد • من الواضح أن المعادلة (3) صحيحة عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ • فاذا كانت هذه هي الاعداد الوحيدة التي تتحقق من أجلها المعادلة (3) ، فاننا نقول إن المجموعة M **مستقلة خطيا** • واذا لم تكن M مستقلة خطيا قلنا إنها **مرتبطة خطيا** ، أي أن M تكون مرتبطة خطيا اذا كانت (3) محققة من أجل مجموعة $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ من الاعداد ليست جميعها أصفارا •

ونقول عن مجموعة جزئية ما M من X إنها **مستقلة خطيا** اذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية في M مستقلة خطيا • ويقال عن M إنها **مرتبطة خطيا** اذا لم تكن M مستقلة خطيا • ∎

ان ما يدعونا لايراد هذه المصطلحات ينبع من حقيقة أنه اذا كانت $M = \{x_1, \cdots, x_r\}$ مرتبطة خطيا ، فان واحدا على الاقل من متجهات M يمكن أن يكتب على شكل تركيب خطي للمتجهات الاخرى • فمثلا ، اذا تحققت (3) وكان $\alpha_r \neq 0$ ، فان M مرتبطة خطيا •ويمكن عندئذ حل (3) بالنسبة الى x_r ونجد

$$x_r = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{r-1} x_{r-1} \qquad (\beta_j = -\alpha_j/\alpha_r).$$

هذا ويمكن توظيف مفهومي الاستقلال والارتباط الخطي في تعريف بعد الفضاء المتجهي انطلاقا من التعريف التالي •

٢-١-٧ تعريف (الفضاءات المتجهية منتهية البعد وغير منتهية البعد)

نقول عن فضاء متجهي X انه **منتهي البعد** اذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث تحوي X جملة مستقلة خطيا من n من المتجهات في حين أن أي $n+1$ من المتجهات في X تكون مرتبطة خطيا . عندئذ يدعى n **بعد** X ، ونكتب $n = \dim X$. ونقول عن الفضاء $X = \{0\}$ بأنه منته وبعده $\dim X = 0$. واذا لم يكن X منتهي البعد ، فاننا نقول بأنه **غير منتهي البعد** . ∎

ان الفضاءات غير منتهية البعد أهم في علم التحليل الرياضي من الفضاءات منتهية البعد . وعلى سبيل المثال ، فان $C[a, b]$ و l^2 غير منتهيي البعد ، في حين أن $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ منتهيا البعد ، وبعد كل منهما n .

اذا كان $\dim X = n$ ، فان كل مرتبة n من المتجهات المستقلة خطيا في X تدعى **قاعدة** للفضاء X (أو **قاعدة في** X) . واذا كانت $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X ، فانه يوجد لكل عنصر x من X تمثيل وحيد على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة :

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

وعلى سبيل المثال ، فان المتجهات التالية تشكل قاعدة لـ $\mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \cdots, 1). \end{aligned}$$

وتدعى هذه القاعدة أحيانا **القاعدة القانونية** لـ $\mathbf{R}^n$.

وبصورة أعم ، فاذا كان X أي فضاء متجهي ، ليس منتهي البعد بالضرورة ، وكانت B مجموعة جزئية مستقلة خطيا في X وتولد X ، فان B تدعى **قاعدة** (أو **قاعدة هامل**) لـ X . وبالتالي فاذا كانت B قاعدة لـ X ، فان لكل متجه

غير صفري x من X تمثيلا وحيدا على شكل تركيب خطي لعناصر (تؤلف مجموعة منتهية) من B وحيث تكون المعاملات أعداد غير صفرية معا .

سنبين الآن بأنه **يوجد لكل فضاء متجهي** $X \neq \{0\}$ **قاعدة** .

ان صحة هذه الدعوى واضحة للعيان في حال الفضاءات منتهية البعد . أما في حال الفضاءات المتجهية غير منتهية البعد ، فان اثبات وجود القاعدة يستند الى تمهيدية زورن ، وسنقدم هذا الاثبات فيما بعد . وتمهيدية زورن المذكورة تحوي مفاهيم عديدة سنشرحها بعد فترة من الزمن ، ذلك أننا الآن سندرس أشياء أخرى تهمنا أكثر . لذا سنرجىء اثبات الوجود المذكور الى حين سردنا للبند ٤ـ١ ، حيث نورد تمهيدية زورن لغرض آخر .

ومن الجدير بالذكر أن لقواعد فضاء متجهي معطى X (منتهي البعد أو غير منتهي البعد) عددا أصليا واحدا . (ويلزم للبرهان على هذا أدوات اكثر تقدما من نظرية المجموعات . راجع الصفحة الثالثة من كتاب M. M. Day المنشور عام ١٩٧٣م) ويدعى هذا العدد **بعد** الفضاء X . لاحظ أن هذا يحوي ويوسع التعريف ٢ـ١ـ٧ .

٢ـ١ـ٨ مبرهنة (بعد الفضاء الجزئي) .

اذا كان X فضاء متجهيا بعده n ، فان لكل فضاء جزئي فعلي Y من X بعدا اصغر من n .

البرهان :

اذا كان $n = 0$ فان $X = \{0\}$ ، وليس لهذا الفضاء فضاء جزئي فعلي . واذا كان $\dim Y = 0$ ، فان $Y = \{0\}$ ، وبالتالي $X \neq Y$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون $\dim X \geqq 1$ ، وواضح أن $\dim Y \leqq \dim X = n$. أما اذا كان $\dim Y = n$ ، فانه يوجد لـ Y قاعدة مؤلفة من عناصر عددها n ، وهذه القاعدة لابد أن تكون قاعدة للفضاء X نظرا لان $\dim X = n$ ، وبالتالي يكون $X = Y$. يبين هذا أن أي مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات في Y يجب أن تحوي من العناصر عددا أقل من n ، أي أن $\dim Y < n$. ∎

مسـائل

١ ـ أثبت أن مجموعة كل الاعداد الحقيقية ، المزودة بعمليتي الجمع والضرب المألوفتين ، تشكل فضاء متجهيا حقيقيا وحيد البعد ، وأن مجموعة كل الاعداد العقدية تشكل فضاء متجهيا عقديا وحيد البعد •

٢ ـ أثبت صحة (1) و (2) •

٣ ـ حدد $\text{span}\ M$ للمجموعة $M=\{(1,1,1),(0,0,2)\}$ في $\mathbf{R}^3$ •

٤ ـ حدد من بين المجموعات الجزئية التالية من $\mathbf{R}^3$ ما كان منها مشكلا لفضاء جزئي من $\mathbf{R}^3$ •

[نفترض هنا أن $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$]

(آ) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1=\xi_2$ $\xi_3=0$ •

(ب) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1=\xi_2+1$ •

(جـ) مجموعة كل العناصر x حيث ξ_1, ξ_2, ξ_3 أعداد موجبة •

(د) مجموعة كل العناصر x حيث $\xi_1-\xi_2+\xi_3=k$ (k ثابت) •

٥ ـ بيّن أن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ ، حيث $x_i(t)=t^i$ ، تشكل مجموعة مستقلة خطيا في الفضاء $C[a,b]$ •

٦ ـ أثبت أنه اذا كان X اي فضاء متجهي بعده n ، فان تمثيل اي x على شكل تركيب خطي لمتجهات قاعدة معطاة $e_1, \cdots, e_n$ هو تمثيل وحيد •

٧ ـ لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لفضاء متجهي عقـدي X • أوجد قاعـدة في X باعتباره فضاء متجهيا حقيقيا • عيّن بعد X في كل من الحالتين •

٨ ـ اذا كانت M مجموعة مرتبطة خطيا في فضاء متجهي عقدي X ، فهل مـن الضروري أن تكون M مرتبطة خطيا في X باعتباره فضاء متجهيا حقيقيا ؟

٩ ـ لنأخذ الفترة المثبتة $[a,b]$ في $\mathbf{R}$ ،ولننظر في المجموعة X المؤلفة من كل الحدوديات ذات المعاملات الحقيقية والتي لاتزيد درجة كل منها عن عـدد معطى n ، ومن الحدودي $x=0$ (الذي لا تعرف درجة له وفـق التعريف

المألوف للدرجة) . أثبت أن المجموعة X المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي المألوفتين تشكل فضاء متجهيا حقيقيا بعده $n+1$. أوجد قاعدة لـ X ، ثم بين أنه يمكن الحصول على فضاء متجهي عقدي $\bar{X}$ بطريقة مماثلة وذلك لدى جعل المعاملات في الحدوديات عقدية . هل X فضاء جزئي من $\bar{X}$ ؟

١٠ــ اذا كان Y و Z فضاءين جزئيين من فضاء متجهي X ، فبين أن $Y \cap Z$ فضاء جزئي من X ، في حين أن $Y \cup Z$ ليس بالضرورة كذلك . اعط أمثلة على ذلك .

١١ــ اذا كانت $M \neq \varnothing$ أي مجموعة جزئية من فضاء متجهي X ، فبين أن $\operatorname{span} M$ فضاء جزئي من X .

١٢ــ بيّن أن مجموعة كل المصفوفات المربعة المؤلفة من سطرين تشكل فضاء متجهيا . ما هو المتجه الصفري في X ؟ حدد $\dim X$ ، ثم أوجد قاعدة في X . أورد أمثلة على فضاءات جزئية من X . هل تشكل المصفوفات المتناظرة $x \in X$ فضاء جزئيا ؟ وهل تشكل المصفوفات الشاذة فضاء جزئيا أيضا ؟

١٣ــ (الجداء) أثبت ان الجداء الديكارتي $X = X_1 \times X_2$ لفضاءين متجهيين على حقل واحد يغدو فضاء متجهيا ان نحن عرفنا العمليتين الجبريتين كما يلي :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

١٤ــ (**فضاء حاصل القسمة ، البعد المرافق**) ليكن Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X . يرمز الى **المجموعه المشاركة** لعنصر x من X بالنسبة الى Y بالشكل $x+Y$ ، وتعرف هده على أنها المجموعة (انظر الى الشكل ١٢) .

$$x + Y = \{v \mid v = x + y, y \in Y\}.$$

بيّن أن المجموعات المشاركة المختلفة تشكل تجزئه لـ X . ثم بين أنه اذا عرفنا عمليتين جبريتين بالمساواتين (انظر الى الشكلين ١٣ و ١٤) .

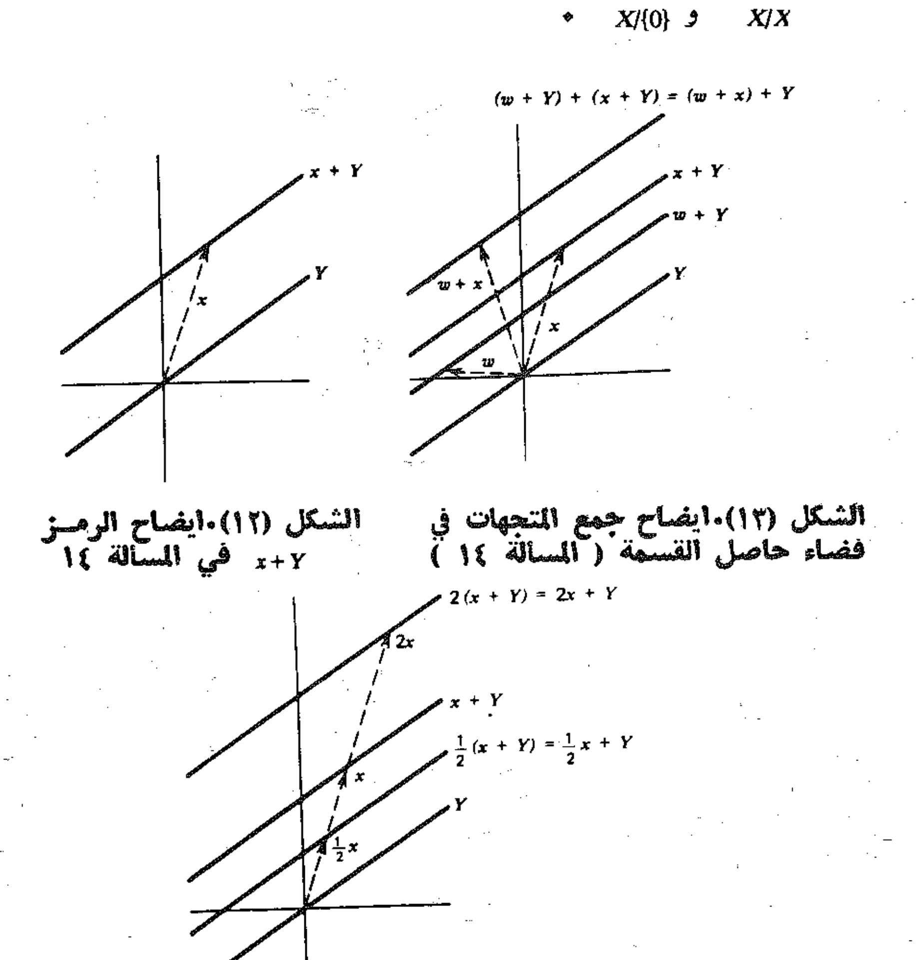
$$(w+Y)+(x+Y)=(w+x)+Y$$

$$\alpha(x+Y)=\alpha x+Y$$

فان هــذه المجموعات المرافقة تؤلف عناصر فضاء متجهي • يسمى هــذا الفضاء **فضـــاء حاصـــل قسمة** (وأحيانا **فضـــاء عامــل**) X على Y ، ويرمز لــه بـ X/Y • ويدعى بعده **البعد المتمم** لـ Y ، ويرمز له بـ $\operatorname{codim} Y$ ، أي أن

$$\operatorname{codim} Y=\dim(X/Y).$$

١٥ــ ليكن $X=\mathbb{R}^3$ و $Y=\{(\xi_1,0,0)\,|\,\xi_1\in\mathbb{R}\}$ • حدد كلا من الفضاءات X/Y و X/X و $X/\{0\}$ •



الشكل (١٣)•ايضاح جمع المتجهات في فضاء حاصل القسمة (المسألة ١٤)

الشكل (١٢)•ايضاح الرمز $x+Y$ في المسألة ١٤

الشكل (١٤)•ايضاح عملية الضرب بعدد في فضاء حاصل القسمة (المسألة ١٤)

٢ـ٢ الفضاء المنظم ، فضاء باناخ

ان الامثلة التي سقناها في البند السابق تبين أن الفضاء المتجهي قد يكون في كثير من الاحوال فضاء متريا في الوقت ذاته وذلك لان متركا d قد عرف على X ، بيد أن عدم وجود رابطة بين البنية الجبرية والمترك يجعلنا لا نتوقع نظرية مفيدة وذات تطبيقات عملية تربط ما بين المفاهيم الجبرية والمترية ، ولضمان مثل هذه الرابطة بين الخواص « الجبرية » و « الهندسية » لـ X ، فاننا نعرف على X متركا d بطريقة خاصة على النحو التالي : ندخل أولا مفهوما مساعدا ، هو النظيم (الذي نعرفه بعد قليل) بحيث نستعمل في هـذا التعريف العمليتين الجبريتين للفضاء المتجهي ، ومن ثم نوظف النظيم في سبيل الحصول على مترك d ، ان هذه الفكرة تقود الى مفهوم **الفضاءات المنظمة**. وقد وجد أن هذه الفضاءات هي خاصة لدرجة تمكننا من ارساء قاعدة لنظرية هامة وواسعة ومستقلة ، ولكنها في الوقت ذاته عامة لدرجة أنها تحوي أنماطا عديدة من فضاءات ذات اهمية تطبيقية ، وفي الواقع، فان عددا كبيرا من الفضاءات المترية في التحليل الرياضي يمكن اعتبارها على أنها فضاءات منظمة ، الامر الذي يهيب بنا الى القول بأن الفضاءات المنظمة ربما كانت من أهم أنواع الفضاءات في التحليل الدالي ، على الاقل من وجهة نظر التطبيقات المعاصرة ، وسنورد فيما يلي التعاريف :

٢ـ٢ـ١ تعريف (الفضاء المنظم ، فضاء باناخ) ،

الفضاء المنظم(*) X هو فضاء متجهي مزود بنظيم ، اما **فضاء باناخ** فهـو فضاء منظم تام (بالنسبة للمترك المحدد بالنظيم ، كما سنرى في (1) بعد قليل) ، **والنظيـم** على فضاء متجهي (حقيقي أو عقدي) هو دالة حقيقية على X يرمـز

(*) يسمى هذا الفضاء أيضا **الفضاء المتجهي المنظم او الفضاء الخطي المنظم**، وقـد أورد هذا التعريف (بصورة مستقلة) كل من باناخ (عام ١٩٢٢م) وهـان (عام ١٩٢٢م) وفينير (عام ١٩٢٢م) . وقد تطورت النظرية بسرعة ، الامر الذي يمكن رؤيته من كتاب باناخ (١٩٣٢) الذي لم ينشر الا بعد ١٠ سنوات .

لقيمتها في نقطة x من X بالشكل

$$\|x\|$$

(ويقرأ « نظيم x ») بحيث تتحقق الخواص التالية :

(ن١) $\|x\| \geqq 0$

(ن٢) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ن٣) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(ن٤) $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ (متباينة المثلث)

ويمثل x و y هنا متجهين كيفيين في X ، أما α فتمثل عددا ما •

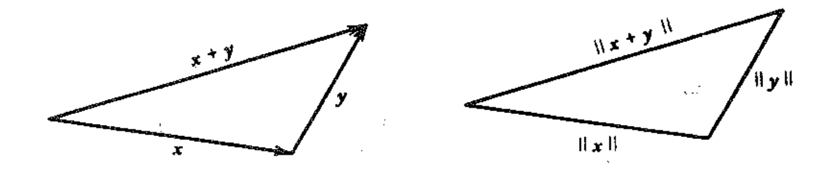
ويحدد النظيم على X متركا d على X وفق المساواة

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X) \tag{1}$$

يسمى هذا المترك **المترك المولد بالنظيم** • يرمز للفضاء المتري الذي عرفناه تواً بالشكل $(X, \|\cdot\|)$ أو بـ X فقط • ∎

ان الدافع لادراج الخواص (ن١) ــ (ن٤) التي تعرف النظيم ينطلق من الطول $|x|$ لمتجه x الذي قابلناه في جبر المتجهات الابتدائي ، وبالتالي فيمكننا أن نكتب في هذه الحالة $\|x\| = |x|$ • وفي الحقيقة ، فان الخاصتين (ن١) و (ن٢) تنصان على أن لكل المتجهات أطوالا موجبة ، عدا المتجه الصفري الذي يساوي طوله الصفر • أما الخاصة (ن٣) فتعني أنه لدى ضرب متجه بعدد ، فان طول المتجه يضرب بالقيمة المطلقة للعدد • وأما الخاصة (ن٤) ، التي أوضحناها بالشكل (١٥) ، فانها تعني أن طول ضلع في مثلث لا يمكن أن يتجاوز مجموع طولي ضلعيه الآخرين •

هذا ، وليس من الصعب أن نستنتج من (ن١) ــ (ن٤) أن (1) تحدد متركا • لذا فان الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ هي فضاءات مترية •



الشكل (١٥) • ايضاح متباينة المثلث (٤)

وتكمن أهمية فضاءات باناخ في أنها تتمتع بخواص معينة (سنوردها في الفصل الرابع) لا تسري على الفضاءات المنظمة غير التامة •

هذا ومن الممكن ملاحظة أن الخاصة (ن٤) تقتضي الدستور

$$\big|\|y\|-\|x\|\big| \leqq \|y-x\|, \tag{2}$$

الامر الذي يمكن استخلاصه بيسر (راجع المسألة ٣) • ويترتب على المتباينة (2) الخاصة الهامة التالية للنظيم :

النظيم هو تطبيق مستمر ، اي أن $x \longmapsto \|x\|$ هو تطبيق مستمر للفضاء $(X, \|\cdot\|)$ في R • (١ـ٣ـ٣) •

من النماذج الابتدائية للفضاءات المنظمة الفضاءات المألوفة لكل المتجهات في المستوي وفي الفضاء ثلاثي البعد • ونجد أمثلة اخرى انطلاقا مـن البند ١ـ١ والبند ١ـ٢ ، لان بعض الفضاءات المترية في هذين البندين يمكن جعلها فضاءات منظمة بصورة طبيعية • ومع ذلك ، فسنبين في مكان آخر من هذا البند أن ليس كل مترك على فضاء متجهي يمكن ان يولد من نظيم •

أمثلـة

٢ـ٢ـ٢ الفضاء الاقليدي R^n والفضاء الوحدي C^n

لقد سبق وعرفنا هذين الفضاءين في ١ـ١ـ٥ • انهما فضاءا باناخ حيـث

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}. \tag{3}$$

وفي الحقيقة فان $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ تامان (١ـ٥ـ١) ، كما أن (3) يولد المترك (7) في البنـد ١ـ١ :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \cdots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

ونلاحظ بوجه خاص أنه في حالة $\mathbf{R}^3$ يكون

$$\|x\| = |x| = \sqrt{\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + \xi_3^{\,2}}.$$

وهذا يؤكد ملاحظتنا السابقة بأن النظيم يعمم الفكرة الابتدائيـةلطول المتجه $|x|$.

٢ـ٢ـ٣ الفضـاء l^p

لقد عرف هذا الفضاء في ١ـ٢ـ٣ . انه فضاء باناخ حيث النظيم

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \tag{4}$$

وسبب ذلك يعود الى أن هذا النظيم يولد المترك التالي (الذي ورد في ١ـ٢ـ٣)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right)^{1/p}$$

أما تمام هذا الفضاء فبيناه في ١ـ٥ـ٤ .

٢ـ٢ـ٤ الفضـاء l^{∞}

سبق وعرفنا هذا الفضاء في ١ـ١ـ٦ ، وهو فضاء باناخ لان المترك هنـا مولد من النظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|$$

أما تمام هذا الفضاء فسبق وبيناه في ١ـ٥ـ٢

٢ـ٢ـ٥ الفضـاء $C[a, b]$

لقد عرفنا هذا الفضاء في ١ـ١ـ٧ ، وهو فضاء باناخ حيث النظيم معطـى بالمسـاواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \tag{5}$$

وحيث $J = [a, b]$ • أما تمام هذا الفضاء فسبق واثبتناه في ١ـ٥ـ٥ •

٢ـ٢ـ٦ الفضاءات المنظمة غير التامة

يمكن انطلاقا من الفضاءات المترية غير التامة في ١ـ٥ـ٧ و ١ـ٥ـ٨ أن نحصل مباشرة على فضاءات منظمة غير تامة • وعلى سبيل المثال ، فان المترك في ١ـ٥ـ ٩مولد من النظيم المحدد بالمساواة

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt. \tag{6}$$

هل يمكن اتمام كل فضاء منظم غير تام ؟ لقد رأينا في ١ـ٦ـ٢ أن هـذا أمـر مؤكد فيما يتعلق بالفضاءات المترية • ولكن ماذا يمكن قوله عن توسيع عمليات الفضاء المتجهي والنظيم الى فضاء الاتمام ؟ سنرى في البند التالي أن هذا التوسيع ممكـن حقـا •

٢ـ٢ـ٧ مثال على فضاء منظم غير تام واتمامه $L^2[a, b]$

يشكل الفضاء المتجهي لكل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ فضاء منظما X نظيمه معطى بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2\, dt\right)^{1/2} \tag{7}$$

ان هذا فضاء غير تام • فمثلا اذا كان $[a, b]=[0, 1]$ ، فان المتتالية في ١ـ٥ـ٩ هي متتالية لكوشي أيضا في الفضاء الحالي X • ان هذا أمر واضح تقريبا بالنظر الى الشكل ١٠ من البند ١ـ٥ ، وينتج بالمكاملة ، ذلك أنه عندما يكون $n > m$ فـان

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 [x_n(t) - x_m(t)]^2\, dt = \frac{(n-m)^2}{3mn^2} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}.$$

ان متتالية كوشي هذه لا تتقارب ، الامر الذي يمكن اثباته باتباع البرهان نفسه الوارد في ١ـ٥ـ٩ ، حيث يستعاض عن المترك في ١ـ٥ـ٩ بالمترك الحالي • وفي حال الفترة $[a, b]$ العامة ، فيمكن انشاء متتالية لكوشي مماثلة بحيث تكون غير متقاربة في X •

يمكننا استنادا الى المبرهنة ١ـ٦ـ٢ اتمام الفضاء X ، وسنرمز الى هذا الاتمام بالشكل $L^2[a, b]$ • ان $L^p[a, b]$ هو فضاء باناخ ، ذلك أنه يمكن توسيع النظيم على X والعمليتين على الفضاء المتجهي الى اتمام X ، الامر الذي سنراه في البند التالي استنادا الى المبرهنة ٢ـ٣ـ٢ •

وبوجه أعم ، فانه أيا كان العدد الحقيقي المثبت $p \geqq 1$ ، فان فضاء باناخ

$$L^p[a, b]$$

هو الاتمام للفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[a, b]$ ، كما في السابق ، والنظيم حينئذ معرف بالدستور

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \tag{8}$$

وقد وضعنا الدليل السفلي p كي يذكرنا بأن هذا النظيم تابع لاختيارنا للعدد p الذي نبقيه مثبتا • لاحظ أنه عندما يكون $p=2$ ، فاننا نجد (7) •

هذا ، ونذكر للقراء الذين لهم معرفة بتكامل لوبيك أنه يمكن الحصول أيضا على الفضاء $L^p[a, b]$ بطريقة مباشرة باستعمال تكامل لوبيك ودوال x القيوسة وفق لوبيك على $[a, b]$ ، بحيث يكون تكامل لوبيك للدالة $|x|^p$ علــى $[a, b]$ موجودا ومنتهيا • وعناصر $L^p[a, b]$ تكون عندئذ صفوف تكافؤ لهذه الدوال ، حيث x يكون مكافئا لـ y اذا كان تكامل لوبيك لـ $|x-y|^p$ على $[a, b]$ مساويا للصفر • [لاحظ أن هذا يضمن صحة الموضوعة (ن٢)] •

أما القراء الذين ليس لهم معرفة سابقة بتكامل لوبيك،فليس من داع لانزعاجهم، ذلك أن هذا المثال ليس ضروريا لمباحثنا القادمة • ومهما يكن من أمر ، فـــان أهمية هذا المثال تكمن في ان الاتمام قد يقودنا الى نوع جديد من العناصر ، وقد يكون لزاما علينا التوصل الى طبيعة هذه العناصر •

٢ـ٢ـ٨ الفضــــاء s

هل يمكن لكل مترك على فضاء متجهي أن يولد من نظيم ؟ ان الجواب عن هذا السؤال تتم بالنفي • ويشكل الفضاء s في ١ـ٢ـ١ مثالا على صحة مانقول• وفي الحقيقة ، فان s هو فضاء متجهي ، الا ان المترك d على s المعرف بالمساواة

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|}$$

لا يمكن أن يولد من نظيم ، الامر الذي ينتج مباشرة من التمهيد التالي الذي ينص على أن المترك d المولد من نظيم يجب أن يحـــقق خاصتين أساسيتين • ان أولى هاتين الخاصتين وهي الواردة في (9a) تسمى **لا تغير الانسحاب** للمترك d •

٢-٢-٩ تمهيدية (لا تغير الانسحاب)

كل مترك d مولد من نظيم على فضاء منظم X يجب أن يحقق الخاصتين التاليتـــين

$$d(x+a, y+a) = d(x, y) \quad \text{(a)}$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y) \quad \text{(b)} \qquad (9)$$

أيا كانت العناصر x و y و a من X وأيا كان العدد α .

البرهــان :

لدينـــا

$$d(x+a, y+a) = \|x+a-(y+a)\| = \|x-y\| = d(x, y)$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\, \|x-y\| = |\alpha|\, d(x, y). \qquad \blacksquare$$

مســائل

١ ــ بيّن أن النظيم $\|x\|$ للعنصر x هو المسافة بين x و 0 .

٢ ــ تحقق من أن الطول المعروف لمتجه في المستوي أو في الفضاء ثلاثي البعد يحقق خواص النظيم (ن١) ــ (ن٤) .

٣ ــ أثبت صحة (2) .

٤ ــ بيّن أنه يمكن الاستعاضة عن (ن٢) بالشرط

$$\|x\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

دون تغيير تعريف النظيم . أثبت أن شرط كون النظيم عددا غير سالب ينتج أيضا من (ن٣) و (ن٤) .

٥ ــ أثبت أن (3) يحدد نظيما •

٦ ــ ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف مــن كــل الازواج المرتبــة $x=(\xi_1, \xi_2)$ و $y=(\eta_1, \eta_2)$ ••• من الاعداد الحقيقية • بيّن أن المساويات الثلاث التاليــة تعين نظائم على X :

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$$

$$\|x\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}.$$

٧ ــ أثبت أن (4) يحقق الشروط (ن١) ــ (ن٤) •

٨ ــ توجد نظائم مختلفة ذات أهمية تطبيقية على الفضاء المتجهي المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد (٢ــ٢ــ٢) وهي معرفة بالدساتير

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_n|$$

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{1/p} \qquad (1 < p < +\infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_1|, \cdots, |\xi_n|\}.$$

تحقق في كل من هذه الحالات أن الشروط (ن١) ــ (ن٤) محققة •

٩ ــ تحقق من أن (5) تحدد نظيما •

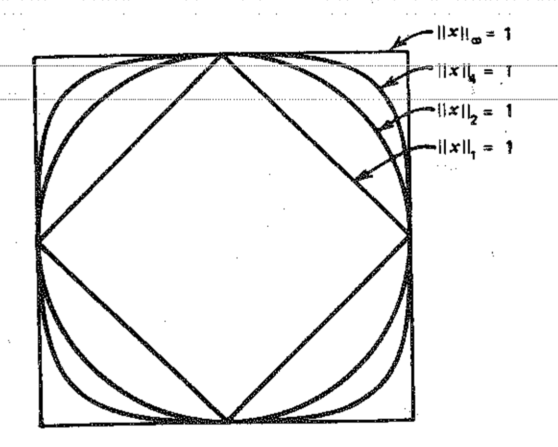
١٠ــ **الكرة الواحدية** • تدعى الكرة

$$S(0; 1) = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$

في فضاء منظم **الكــرة الواحدية** • بيّن أنه في حال النظائم الواردة فــي المسألة ٦ والنظيم المحدد بالمساواة

$$\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{1/4}$$

فان الكرات الواحدية تبدو كما هو مبين في الشكل ١٦ •



الشكل (١٦)،الكرات الواحدية في المسالة ١٠

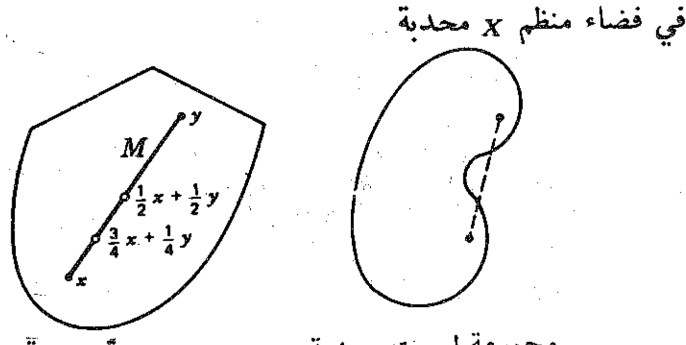
١١ـ **(المجموعة المحدبة ، القطعة المستقيمة)** يقال عن مجموعة جزئية A مــن فضاء متجهي X انها محدبة اذا اقتضى وقــوع أي نقطتين x و y مــن A تحــقق العــلاقة

$$M = \{z \in X \mid z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1\} \subset A.$$

تدعى M **قطعة مستقيمة مغلقة حداها النقطتان** x و y ، وتدعى كل نقطة أخرى من z نقطة داخلية في M ، بيّن أن **الكرة الواحدية المغلقة**

$$\bar{B}(0;1) = \{x \in X \mid \|x\| \leqq 1\}$$

في فضاء منظم X محدبة.

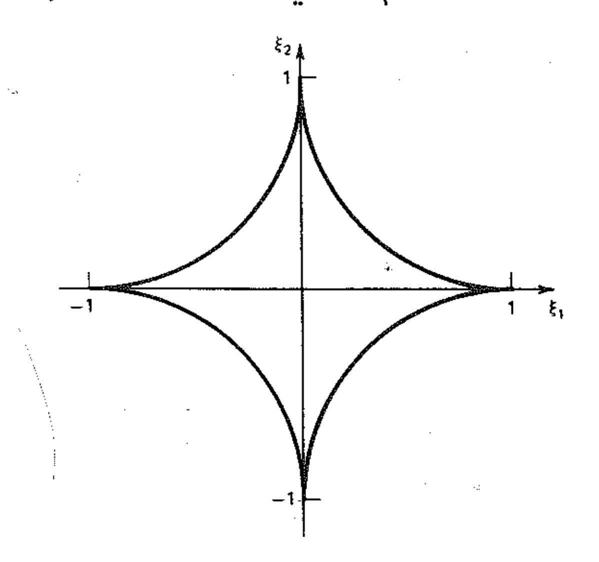


الشكل (١٧) مثالان يوضحان مجموعة محدبة واخرى غير محدبة (المسالة ١١)

١٢ــ بين الافادة من المسألة ١١ أن المساواة

$$\varphi(x) = (\sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|})^2$$

لا تحدد نظيما على الفضاء المتجهي المؤلف من كل الازواج المرتبة $x = (\xi_1, \xi_2)$ ... من الاعداد الحقيقية • ارسم المنحني $\varphi(x) = 1$ وقارنه بالشكل ١٨



الشكل (١٨) المنحني $\varphi(x) = 1$ في المسألة ١٢

١٣ــ بين أن المترك المتقطع على فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ لا يمكن أن يولد من نظيم (١ــ١ــ٨) •

١٤ــ اذا كان d متركا على فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ مولدا من نظيم ، وكان $\tilde{d}$ معرفا على النحو التالي

$$\tilde{d}(x, x) = 0, \qquad \tilde{d}(x, y) = d(x, y) + 1 \qquad (x \neq y),$$

فبيّن أن $\tilde{d}$ لا يمكن أن يولد من نظيم •

١٥ــ **(المجموعة المحدودة)** • بين أن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة

جزئية M من فضاء منظم X محدودة هو أن يوجد عــدد موجب c بحيث تتحقق المتباينة $\|x\|\leqq c$ أيا كان x من M • (لتعريف المجموعــة المحدودة عد الى المسألة ٦ من البند ١ــ٢) •

٢ــ٣ خواص اخرى للفضاءات المنظمة

ان **الفضاء الجزئي** Y من فضاء منظم X هو تعريفا فضاء جزئــي مــن X باعتباره فضاء متجهيا ، نظيمه مقصور نظيم X على المجموعة الجزئية Y • ونقول عن نظيم Y هذا انه **مولــد** من النظيم على X • وفي حال كو ن Y مجموعة مغلقة في X ، فاننا نقول إن Y **فضاء جزئي مغلق** من X •

كذلك ، يعرف **الفضاء الجزئي** Y من فضاء باناخ X بأنه فضاء جزئي من X باعتبار X فضاء منظما • لذا فاننا لا نتطلب من Y أن يكون تاما (رغم أن بعض المؤلفين يعتبرونه كذلك • وهكذا فالحذر ضروري لدى مقارنة الكتب المختلفة)•

وفي هذا الصدد ، تكون المبرهنة ١ــ٤ــ٧ ذات فائدة لانها تقتضي مباشرة المبرهنــة التاليــة :

٢ــ٣ــ١ مبرهنة (الفضاء الجزئي من فضاء باناخ)

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء باناخ X تاما هــو ان تكون المجموعة Y مغلقة في X •

ان **التقارب** وبعض المفاهيم المرتبطة به في الفضاءات المنظمة تنتــج مباشرة من التعريفين ١ــ٤ــ١ و ١ــ٤ــ٣ الواردين في معرض الفضاءات المترية ،ومن كون $d(x, y)=\|x-y\|$ وعلى وجه التحديد ، نجد ما يلي :

(i) تكون المتتالية (x_n) في فضاء منظم X **متقاربة** اذا وجد عنصر x في X بحيث أن

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

ونكتب عندئذ $x_n \longrightarrow x$ ، كما نسمي x نهاية المتتالية (x_n) .

(ii) تكون المتتالية (x_n) في فضاء منظم متتالية كوشي اذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث تتحقق المتباينة

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \qquad (1)$$

أيا كان العددان الصحيحان m, n المحققان للشرط $m, n > N$.

لقد تعاملنا مع المتتاليات حتى في الفضاءات المترية العامة . أما في الفضاءات المنظمة ، فاننا سنخطو خطوة هامة أخرى وذلك باستعمالنا للمتسلسلات كما يلي :

يمكن تعريف **المتسلسلة غير المنتهية** بصورة مماثلة لما فعلنا في التحليل الحقيقي . وفي الواقع ، فاذا كانت (x_k) متتالية في فضاء منظم X ، فمن الممكن أن نقرن بها المتتالية (s_n) **للمجاميع الجزئية**

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

حيث $n = 1, 2, \cdots$. فاذا كانت (s_n) متقاربة ، ولنفترض مثلا أن

$$s_n \longrightarrow s \quad \text{أي أن} \quad \|s_n - s\| \longrightarrow 0$$

قلنا إن **المتسلسلة غير المنتهية** ، أو اختصارا **المتسلسلة**

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots \qquad (2)$$

متقاربة ،وان **مجموعها** يساوي s . وعندئذ نكتب

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots .$$

اذا كانت المتسلسلة $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ متقاربة ، قلنا إن المتسلسلة (2) **متقاربة بالاطلاق** . ويجدر بنا في هذا المقام تنبيه القارىء بأن الشرط اللازم

والكافي كي يقتضي التقارب المطلق لمتسلسلة تقارب هذه المتسلسلة في فضاء منظم X هو أن يكون X فضاء تاما (عد الى المسألتين ٧و٩) ٠

ان مفهوم التقارب يمكن توظيفه في تعريف « قاعدة » كما يلي : اذا حوى فضاء منظم X متتالية (e_n) بحيث أنه يوجد لكل عنصر x في X متتالية وحيدة من الاعداد (α_n) يتحقق معها الشرط

$$\|x-(\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n)\| \longrightarrow 0 \tag{3}$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ ، فان (e_n) تدعى **قاعدة شاودر** (أو **قاعدة**) للفضاء X ٠ وتدعى عندئذ المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

التي مجموعها x **منشور** x بالنسبة لـ (e_n) ، ونكتب

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

وعلى سبيل المثال ، فانه يوجد لـ l^p في ٢ـ٢ـ٣ قاعدة شاودر (e_n) حيث $e_n=(\delta_{nj})$ ، أي أن e_n هي المتتالية التي حدها ذو الترتيب n يساوي 1 ، وكل حدودها الاخرى أصفار ٠ وهكذا فان

$$\begin{aligned} e_1&=(1,0,0,0,\cdots)\\ e_2&=(0,1,0,0,\cdots)\\ e_3&=(0,0,1,0,\cdots) \end{aligned} \tag{4}$$

وهكذا ٠

اذا وجد لفضاء منظم X قاعدة شاودر ، فانه X فَصول (راجع التعريف ١ـ٣ـ٥) ٠ وبما أن البرهان على هذا أمر سهل ، فاننا نترك اقامته للقارىء (المسألة ١٠) ٠ وبالمقابل،فهل يوجد لكل فضاء فصول لباناخ قاعدة لشاودر ؟ ان هذا سؤال شهير طرحه باناخ نفسه منذ قرابة ٥٠ سنة ٠ لقد تم اثبات وجود قاعدة لشاودر في أغلب فضاءات باناخ الفصولة المعروفة ٠ ورغم ذلك ، فان الاجابة

عن السؤال السابق تتم بالنفي ، ذلك أن إنفلو (١٩٧٣) تمكن منذ عهد قريب من انشاء فضاء فصول لباناخ دون أن يكون لهذا الفضاء قاعدة لشاودر •

لننقل أخيرا الى مسألة اتمام الفضاء المنظم ، والتي مررنا على ذكرها بسرعة في البند السابق •

٢-٣-٢ مبرهنة (الاتمام)

ليكن $X=(X,\|\cdot\|)$ فضاء منظما • عندئذ هناك فضاء لباناخ $\hat{X}$ وتطبيق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من $\hat{X}$ كثيف في $\hat{X}$ • ان الفضاء $\hat{X}$ وحيد اذا غضضنا النظر عن الفضاءات الايزومترية معه ، (بمعنى انه اذا كان $\tilde{X}$ أي فضاء لباناخ يحوي فضاء جزئيا كثيفا $\tilde{W}$ ايزومتريا مع X ، فان الفضاءين $\hat{X}$ و $\tilde{X}$ ايزومتريان) •

البرهان :

تقتضي المبرهنة ١-٦-٢ وجود فضاء متري تام $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ ووجود تطبيق ايزومتري $A:\ X\longrightarrow W=A(X)$ ، حيث W كثيف في $\hat{X}$ ، وحيث $\hat{X}$ وحيد بغض النظر عن الفضاءات الايزومترية معه • (نستعمل هنا الحرف A دون T ، كما في ١-٦-٢ ، وذلك لاننا سنستعمل الحرف T بمعنى آخر لدى دراسة بعض التطبيقات القادمة في البند ٨-٢) • وبالتالي ، فيجب علينا لاثبات هذه المبرهنة أن نجعل من $\hat{X}$ فضاء متجهيا ، ومن ثم نعرف على $\hat{X}$ نظيما مناسبا •

لتعريف عمليتي الفضاء المتجهي الجبريتين على $\hat{X}$ ، نأخذ أي عنصرين $\hat{x}$ و $\hat{y}$ من $\hat{X}$ وأي ممثلين (x_n) من $\hat{x}$ و (y_n) من $\hat{y}$ • وعلينا أن نذكر بأن $\hat{x}$ و $\hat{y}$ هما صفا تكافؤ لمتتاليات كوشي في X • فاذا فرضنا أن $z_n=x_n+y_n$ فان (z_n) هي متتالية لكوشي في X لان

$$\|z_n-z_m\|=\|x_n+y_n-(x_m+y_m)\|\leqq\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|.$$

سنعرف المجموع $\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}$ لـ $\hat{x}$ و $\hat{y}$ بأنه صف التكافؤ الذي تشكل (z_n) ممثلا له • لذا فان $(z_n)\in\hat{z}$ • ان هذا التعريف مستقل عن اختيارنا الخاص لمتتاليتي

كوشي المنتميتين الى $\hat{x}$ و $\hat{y}$ ، ذلك أن (1) في البند ١ــ٦ تبين بأنه اذا كان $(x_n)\sim(x_n')$ و $(y_n)\sim(y_n')$ ، فان $(x_n+y_n)\sim(x_n'+y_n')$ لأن

$$\|x_n+y_n-(x_n'+y_n')\|\leqq\|x_n-x_n'\|+\|y_n-y_n'\|.$$

ونعرف بصورة مماثلة الجداء $\alpha\hat{x}$ في $\hat{X}$ لعدد α بالعنصر $\hat{x}$ على أنه صف التكافؤ الذي تمثله (αx_n) • ومرة ثانية ، فان هذا التعريف مستقل عن اختيارنا الخاص لممثل $\hat{x}$ • والعنصر الصفري في $\hat{X}$ هو صف التكافؤ الحاوي على كل متتاليات كوشي المتقاربة من الصفر • ومن السهل التحقق بأن لهاتين العمليتين الجبريتين كل الخواص المطلوبة تعريفا كي يشكل $\hat{X}$ فضاء متجهيا • ويترتب على التعريف أن عمليتي الفضاء المتجهي على W المولدتين من $\hat{X}$ تنسجمان مع العمليتين المولدتين من X بواسطة A •

كذلك ، فان A يولد على W نظيما $\|\cdot\|_1$ قيمته في كل نقطة $\hat{y}=Ax$ من W هي $\|\hat{y}\|_1=\|x\|$ • والمترك الموافق على W هو مقصور $\hat{d}$ على W نظرا لكون A تطبيقا ايزومتريا • ويمكننا تمديد النظيم $\|\cdot\|_1$ الى $\hat{X}$ بوضع $\|\hat{x}\|_2=\hat{d}(\hat{0},\hat{x})$ أيا كان $\hat{x}$ من $\hat{X}$ ، ذلك أن من الواضح بأن $\|\cdot\|_2$ تحقق (ن١) و (ن٢) من البند ٢ــ٢ ، وأن الموضوعتين الاخريين (ن٣) و (ن٤) تنتجان من نظيرتيهما المتعلقتين بالنظيم $\|\cdot\|_1$ وذلك بالانتقال الى النهاية • ∎

مسائل

١ ــ اثبت ان $c\subset l^\infty$ يشكل فضاء متجهيا جزئيا من l^∞ (١ــ٥ــ٣) ، وكذلك c_0 المؤلف من كل متتاليات الاعداد المتقاربة من الصفر •

٢ ــ بيّن أن c_0 الوارد في المسألة ١ هو فضاء جزئي مغلق في ، وبالتالي فان c_0 تام استنادا الى ١ــ٥ــ٢ و ١ــ٤ــ٧ •

٣ ــ لتكن المجموعة الجزئية Y من l^∞ مؤلفة من كل المتتاليات التي يوجد في كل منها عدد منته فقط من الحدود غير الصفرية • بيّن أن Y فضاء جزئي من l^∞ ، الا أنه غير مغلق •

٤ ــ (**استمرار عمليتي الفضاء المتجهي**) أثبت ان عمليتي الجمع المتجهي والضرب بعدد في فضاء منظم X عمليتان مستمرتان بالنسبة للنظيم ، أي أن التطبيقين $(x, y) \longmapsto x+y$ و $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ مستمران .

٥ ــ برهن أنه اذا كان $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ فان $x_n+y_n \longrightarrow x+y$. أثبت أنه اذا كان $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ و $x_n \longrightarrow x$ فان $\alpha_n x_n \longrightarrow \alpha x$.

٦ ــ أثبت أن اللصاقة $\bar{Y}$ للفضاء الجزئي Y من فضاء منظم X هي أيضا فضاء متجهي جزئي .

٧ ــ (**التقارب المطلق**) . بيّن أن تقارب المتسلسلة $\|y_1\|+\|y_2\|+\|y_3\|+\cdots$ قد لا يقتضي تقارب المتسلسلة $y_1+y_2+y_3+\cdots$. **إرشاد** . خذ Y الوارد في المسألة ٣ والمتتالية (y_n) حيث $y_n=(\eta_j^{(n)})$ و $\eta_n^{(n)}=1/n^2$ و $\eta_j^{(n)}=0$ عندما $j \neq n$.

٨ ــ اذا اقتضى التقارب المطلق لاي متسلسلة في فضاء منظم تقارب هذه المتسلسلة ، فبيّن أن X فضاء تام .

٩ ــ أثبت أن كل متسلسلة متقاربة بالاطلاق في فضاء باناخ متقاربة .

١٠ــ (**قاعدة شاودر**) . بين أنه اذا وجدت قاعدة لشاودر في فضاء منظم ، فانه فصول .

١١ــ أثبت أن (e_n) ، حيث $e_n=(\delta_{nj})$ ، قاعدة شاودر للفضاء l^p ، بفرض أن $1 \leqq p < +\infty$.

١٢ــ (**نصف النظيم**) يعرف **نصف النظيم** على فضاء متجهي X بأنه تطبيق $p: X \longrightarrow \mathbf{R}$ يحقق الشروط (ن١) و (ن٣) و (ن٤) من البند ٢ــ٢ (ويسميه بعض المؤلفين **شبه النظيم**).أثبت أن

$$p(0)=0,$$

$$|p(y)-p(x)| \leqq p(y-x).$$

(وبالتالي ، فاذا اقتضت المساواة $p(x)=0$ أن $x=0$ ، فان p نظيم) .

١٣ـ بين أن العناصر x من X في المسألة ١٢ والمحققة للمعادلة $p(x)=0$ تشكل فضاء جزئيا N من X ، كما أنه يمكن تعريف نظيم على X/N (راجع المسألة ١٤ من البند ٢ـ١) بالمساواة $\|\hat{x}\|_0 = p(x)$ ، حيث $x \in \hat{x}$ و $\hat{x} \in X/N$ •

١٤ـ **(فضاء حاصل القسمة)** ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا من فضاء منظم $(X, \|\cdot\|)$ • بين أنه يمكن تعريف نظيم $\|\cdot\|_0$ على X/Y (راجع المسألة ١٤ من البند ٢ـ١) بالمساواة

$$\|\hat{x}\|_0 = \inf_{x \in \hat{x}} \|x\|$$

حيث $\hat{x} \in X/Y$ ، أي أن $\hat{x}$ أي مجموعة مرافقة لـ Y •

١٥ـ **(جداء الفضاءات المنظمة)** • اذا كان $(X_1, \|\cdot\|_1)$ و $(X_2, \|\cdot\|_2)$ فضاءين منظمين ، فبين أن فضاء الجداء المتجهي $X = X_1 \times X_2$ (المسألة ١٣ من البند ٢ـ١) يغدو فضاء منظما عند وضع

$$\|x\| = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2) \qquad [x = (x_1, x_2)].$$

٢ـ٤ الفضاءات المنظمة والفضاءات الجزئية منتهية البعد

هل الفضاءات المنظمة منتهية البعد أبسط من الفضاءات غير منتهية البعد ؟ وفي أي صدد ؟ ان طرح مثل هذه الاسئلة أمر طبيعي ، وأهميتها تنبع من كون الفضاءات المنظمة رفضاءاتها الجزئية تلعب دورا بارزا في العديد من المواضيع (كنظرية التقريب والنظرية الطيفية مثلا) • ويمكن قول الكثير من الاشياء المهمة في هذا السياق• لذا فمن الاهمية بمكان تجميع بعض الحقائق حول هذه الفضاءات لكونها مهمة في حد ذاتها ، ولانهـا تشكل أدوات لابحاثنا القادمة • وهذا هو موضوعنا في البند الحالي ولاحقه •

ويشكل التمهيد التالي مصدرا لكثير من النتائج المتوخاة • وينص بصورة تقريبية على أنه في حال الاستقلال الخطي للمتجهات ، فمن غير الممكن ايجاد تركيب خطي يحوي أعدادا كبيرة ويمثل في الوقت نفسه متجها صغيرا •

٢ـ٤ـ١ تمهيدية (التراكيب الخطية)

لتكن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات من فضاء منظم X (أيا كان بعده) ، عندئـذ يوجد عـدد موجب c بحيث تتحـقق المتباينـة

$$(1) \qquad \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geqq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \qquad (c > 0).$$

أيا كانت الاعداد α_1 , $\cdots$, α_n •

البرهـان :

سنرمز بـ s للمقدار $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$ • فاذا كان $s = 0$ ، فان كلا من α_i يساوي الصفر ، وبالتالي فان (1) تكـون محققة أيا كانت c • لنفترض الآن أن $s > 0$. • عندئذ تكون (1) مكافئة للمتباينة الناتجة عن (1) بتقسيم طرفيها على s • فاذا فرضنا أن $\beta_j = \alpha_j/s$ ، فان (1) تكافىء المتباينة

$$(2) \qquad \|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geqq c \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1\right).$$

لذا فانه يكفي البرهان على وجود عدد موجب c بحيث تكـون (2) محققـة أيا كانت المرتبة n من الاعداد $\beta_1, \cdots, \beta_n$ حيث $\sum |\beta_j| = 1$ •

لنفترض مؤقتا عدم صحة هذا الامر • عندئذ توجـد متتالية (y_m) مـن المتجهـات

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1\right)$$

بحيث أن

$$\|y_m\| \longrightarrow 0 \quad \text{عنـدما} \quad m \longrightarrow \infty$$

ان محاكمتنا الآن ستكون على النحو التالي : لما كان $\sum |\beta_j^{(m)}| = 1$ ، فان $|\beta_j^{(m)}| \leqq 1$ لذا فان المتتالية

$$(\beta_i^{(m)}) = (\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \cdots)$$

تكون محدودة لدى تثبيت i • وبالتالي ، فانه يترتب علـى مبرهنة بولزانو ـ فيرشتراس أن المتتالية $(\beta_1^{(m)})$ تحوي متتالية جزئية متقاربة • لنرمز بـ β_1 لنهايـة هذه المتتالية الجزئية ، و بـ $(y_{1,m})$ لنهاية المتتالية الجزئية المقابلة مـن (y_m) • وباجراء مناقشة مماثلة ، فاننا نجد أن $(y_{1,m})$ تحوي متتالية جزئية $(y_{2,m})$ بحيث تكون المتتالية الجزئية المقابلة من الاعداد $\beta_2^{(m)}$ متقاربة ، ولنرمز بـ β_2 لنهايـة $\beta_2^{(m)}$ • فاذا واصلنا السير في هذه الطريق ، فاننا نجد بعد خطوات عددها n متتالية جزئية $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \cdots)$ من (y_m) حدودها من الشكل

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1\right)$$

حيث تحقق الاعداد $\gamma_j^{(m)}$ الشرط $\gamma_j^{(m)} \longrightarrow \beta_j$ عندما $m \longrightarrow \infty$ • لذا نجد أنـه عنـدما $m \longrightarrow \infty$ يكـون

$$y_{n,m} \longrightarrow y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

حيث $\sum |\beta_j| = 1$ ، وهذا يعني أنه لايمكن أن تكون الاعداد β_j أصفارا معا • وبما أن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا ، فـان $y \neq 0$ • ونجد من جهة أخرى أن $y_{n,m} \longrightarrow y$ يقتضي $\|y_{n,m}\| \longrightarrow \|y\|$ استنادا الى استمرار النظيم • ولما كـان $\|y_m\| \longrightarrow 0$ فرضا ، وكانت $(y_{n,m})$ متتالية جزئية من (y_m) ، فلا بد أن يكـون $\|y_{n,m}\| \longrightarrow 0$، وهذا يقتضي المساواة $\|y\| = 0$ وفق (ن٢) من البند ٢ـ٢ • وبمـا أن هذا يناقض كون $y \neq 0$ ، فاننا نكون قد أثبتنا صحة التمهيدية • ∎

وكتطبيق أول لهذه التمهيدية ، سنورد المبرهنة الاساسية التالية :

٢ـ٤ـ٢ مبرهنة (التمام)

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاما • وبوجه خاص ، فان كل فضاء منظم منتهي البعد تام •

البرهــان :

لتكن (y_m) متتالية ما لكوشي في Y ، ولنثبت أنها متقاربة في Y ، رامزين للنهاية بـ y • لنفترض أن $\dim Y = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ أي قاعدة لـ Y • عندئذ يكون لكل y_m تمثيل وحيد بالشكل

$$y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

ولما كانت (y_m) متتالية كوشي ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عــدد صحيح موجب N بحيث أن $\|y_m - y_r\| < \varepsilon$ عندما يكون $m, r > N$ • يترتب على هذا وعلى التمهيدية ٢ـب‍ـ٤ـ١ وجود عدد موجب c بحيث أن

$$\varepsilon > \|y_m - y_r\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}) e_j \right\| \geqq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}|,$$

عندما يكون $m, r > N$ • وبالتقسيم على c نجد أن

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)}| < \frac{\varepsilon}{c} \qquad (m, r > N).$$

وهذا يبين أن كلا من المتتاليات الآتية (التي عددها n)

$$(\alpha_j^{(m)}) = (\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \cdots) \qquad j = 1, \cdots, n$$

هي متتالية في $\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$ ، وبالتالي فانها متقاربة ، وسنرمز لنهايتها بـ α_j • لنعرف بعد هذا (باستخدام النهايات α_1 و •••• و α_n) العنصر y بالمساواة

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

من الواضح أن $y \in Y$ ، كما أن

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) e_j \right\| \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \, \|e_j\|.$$

لما كان $\alpha_j^{(m)} \longrightarrow \alpha_j$ في الطرف الايمن ، فان $\|y_m - y\| \longrightarrow 0$ ، أي أن $y_m \longrightarrow y$ •

وهذا يبين أن (y_m) متقاربة في Y • وبما أن (y_m) متتالية اختيارية لكوشي في Y ، فـان Y تـام • ∎

نستنتج من هذه المبرهنة والمبرهنة ١ــ٤ــ٧ ما يلي :

٢ــ٤ــ٣ مبرهنة (الانغلاق)

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون مغلقا في X •

سنحتاج الى هذه المبرهنة في عدة مناسبات في أبحاثنا القادمة •

ويجدر بنا توجيه النظر الى أنه ليس لزاما على الفضاءات الجزئية غير منتهية البعد أن تكون مغلقة •

مثـال :

ليكن $X = C[0, 1]$ و $Y = \text{span}(x_0, x_1, \cdots)$ حيث $x_j(t) = t^j$ ، أي أن Y هي مجموعة الحدوديات جميعا • ان Y ليس مغلقا في X • (لماذا ؟)

ثمة خاصة هامة أخرى للفضاء المتجهي منتهي البعد X تتلخص في أن جميـع النظائم على X تولد الطبولوجيا نفسها على X (راجع البند ١ــ٣) ، أي أن كل المجموعات المفتوحة في X هي نفسها بغض النظر عن الاختيار الخاص لنظيم على X • أما تفصيل هذا الامر فهو وارد في ثنايا المبرهنة التالية :

٢ــ٤ــ٤ تعريف (النظائم المتكافئة)

نقول عن نظيم $\|\cdot\|$ على فضاء متجهي X انه **مكافـىء** للنظيم $\|\cdot\|_0$ على X اذا وجد عددان موجبان a و b بحيث يتحقق الشرط

$$a\|x\|_0 \leqq \|x\| \leqq b\|x\|_0. \qquad (3)$$

∎

أيا كان x من X •

وتفسر الحقيقة التالية سبب تبنينا لهذا التعريف •

يحدد النظيمان المتكافئان على X طبولوجيا واحدة على X •

وفي الحقيقة ، فان هذا الامر ناتج من (3) ومــن أن كل مجموعة مفتوحة غير خالية هي اجتماع لكرات مفتوحة (راجع المسألة ٤ من البند ١ـ٣) • سنترك تفاصيل ايراد البرهــان للقارىء (المسألة ٤) الذي يمكــن أن يثبت أيضا بــأن متتاليات كوشي في الفضاءين $(X, \|\cdot\|)$ و $(X, \|\cdot\|_0)$ واحدة (المسألة ٥) •
ويمكننا باستخدام التمهيدية ٢ـ٤ـ١ أن نثبت صحة المبرهنة التالية(التي لاتصح في حال الفضاءات غير منتهية البعد) •

مبرهنة (النظائم المتكافئة)

كل نظيم $\|\cdot\|$ على فضاء متجهي منتهي البعد X لابد أن يكافىء اي نظيم آخــر $\|\cdot\|_0$ على X •

البرهــان :

لنفترض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ أي قاعدة للفضاء X • عندئــذ يكون لكل x من X تمثيل وحيد

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

ونجد استنادا الى التمهيدية ٢ـ٤ـ١ أن هنالك عددا موجبا c بحيــث يكون

$$\|x\| \geqq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

كذلك ، فان متباينة المثلث تعطي

$$\|x\|_0 \leqq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \|e_j\|_0 \leqq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \qquad k = \max_j \|e_j\|_0.$$

يترتب على ما سبق أن $a\|x\|_0 \leqq \|x\|$ حيث $a = c/k > 0$ • أما المتباينة الاخرى في (3) فنجدها بجعل كل من النظيمين $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ يلعب دور الآخر في المناقشة الســابقة • ∎

لهذه النظرية أهمية تطبيقية كبيرة • فهي تقتضي مثلا أن تقارب أو تباعــد

متتالية في فضاء متجهي منتهي البعد لا يتعلق بالاختيار الخاص للنظيم الذي نزود بــه الفضــاء •

مســائل

١ ــ أعط أمثلة على فضاءات جزئية غير مغلقة من l^∞ و l^2 •

٢ ــ ما هي أكبر قيمة ممكنة للعدد c في (1) في كل مما يلي : (آ) $X=\mathbb{R}^2$ و $x_1=(1,0)$ و $x_2=(0,1)$ ، (ب) $X=\mathbb{R}^3$ و $x_1=(1,0,0)$ و $x_2=(0,1,0)$ و $x_3=(0,0,1)$ ؟

٣ ــ أثبت أن موضوعات علاقة التكافؤ تصح في التعريف ٢ــ٤ــ٤ •

٤ ــ بيّن أن النظائم المتكافئة على فضاء متجه X تولد طبولوجيا واحدة على X •

٥ ــ اذا كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ نظيمين متكافئين على X ، فبين أن متتاليات كوشي واحدة في الفضاءين $(X,\|\cdot\|)$ و $(X,\|\cdot\|_0)$ •

٦ ــ يترتب على المبرهنة ٢ــ٤ــ٥ أن النظيمين $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ متكافئان • أعط برهانا مباشرا على صحة هذا الامر •

٧ ــ ليكن $\|\cdot\|_2$ نظيما كما في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ ، ولنفترض أن $\|\cdot\|$ أي نظيم على ذلك الفضاءالمتجهي، وليكن X • أثبت مباشرة (دون اللجوء الى ٢ــ٤ــ٥) وجود عــدد موجب b بحيــث يكــون $\|x\|\leqq b\|x\|_2$ أيــا كــان x •

٨ ــ بين أن النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ يحققان الشرط

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1\leqq\|x\|_2\leqq\|x\|_1.$$

٩ ــ اذا كان النظيمان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_0$ على فضاء متجهي X متكافئين ، فبين صحة ما يلي : (i) $\|x_n-x\|\longrightarrow 0$ تقتضي (ii) $\|x_n-x\|_0\longrightarrow 0$ (وبالعكس طبعا) •

١٠ــ أثبت أن كل المصفوفات $A=(\alpha_{jk})$ من المرتبة $m\times n$ ، حيث m و n عددان مثبتان تشكل فضاء متجهيا Z بعده mn • بين بأن كل النظائم على Z متكافئة • ما هي مشابهات النظائم $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|_\infty$ الواردة في المسألة ٨ من البند ٢ــ٢ في حالة الفضاء الحالي Z ؟

٢ــ٥ التراص والبعد المنتهي

هنالك خواص قليلة أساسية أخرى للفضاءات المنظمة منتهية البعد وللفضاءات الجزئية منها ترتبط بمفهوم التراص ، الذي نعرفه على النحو التالي •

٢ــ٥ــ١ تعريف (التراص)

نقول عن فضاء متري X انه متراص* اذا حوت كل متتالية في X متتالية جزئية متقاربة • ونقول عن مجموعة جزئية M من X انها متراصة اذا كانت M متراصة باعتبارها فضاء جزئيا من X ، أي اذا حوت كل متتالية في M متتالية جزئية نهايتها عنصر من M • ∎

وتقدم التمهيدية التالية سمة عامة للمجموعات المتراصة •

٢ــ٥ــ٢ تمهيدية (التراص)

كل مجموعة جزئية M من فضاء متري مغلقة ومحدودة •

البرهــان :

من المعلوم استنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ أنه اذا كان x عنصرا ما من $\bar{M}$

(*) وبصورة ادق ، إنه **متراص تتابعيا** • وهذا هو اهم نوع من انواع التراص في التحليل الرياضي • ومن الجدير بالذكر ان ثمة نوعين اخرين من التراص، بيد أن أنواع التراص الثلاثة المختلفة تتطابق في الفضاءات المترية ، وبالتالي فان التمييز بينها غير وارد في أبحاثنا •

فتوجد متتالية (x_n) في M بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ • ولما كانت M متراصة ، فـان $x \in M$ ، الامر الذي يعني أن M مغلقة نظرا لكون العنصر x من $\bar{M}$ كيفيا • لننتقل الى اثبات محدودية M • اذا افترضنا مؤقتا أن M غير محدودة ، فلابد أن تحوي عندئذ متتالية غير محدودة (y_n) بحيث يكون $d(y_n, b) > n$ ، بافتراض b أي عنصر مثبت • ان هذه المتتالية لا يمكن أن تحوي متتالية جزئية متقاربة ، ذلك أن كل متتالية جزئية متقاربة يجب أن تكون محدودة وفق التمهيدية ١ــ٤ــ٢ • ▮

ان عكس هذه التمهيدية غير صحيح بعامة •

البرهــان :

لاثبات هذه الدعوى الهامة ، نأخذ المتتالية (e_n) في l^2 ، حيث $e_n = (\delta_{nj})$ متتالية حدها ذو الترتيب n يساوي 1 في حــين تكون حدودها الاخرى جميعــا مساوية 0 • (راجع (٤) مــن البند ٢ــ٣) • ان هــذه المتتاليــة محدودة لان $\|e_n\| = 1$ ، كما تشـكل حدودها مجموعة مغلقة لعــدم وجود نقطة تراكم لهــا • كذلك ، فان هذه المجموعة ليست متراصة للسبب نفسه • ▮

أما في حال الفضاءات المنظمة المنتهية ، فنجد ما يلي :

٢ــ٥ــ٣ مبرهنة (التراص)

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء منظم منتهـي البعد متراصة هو أن تكون M مغلقة ومحدودة •

البرهــان :

ان التراص يقتضي الانغلاق والمحدودية كما رأينا في التمهيدية ٢ــ٥ــ٢ ، وسنبرهن الآن على العكس • لتكن M مغلقة ومحدودة ، ولنفترض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X • لنأخذ المتتالية (x_m) في M • عندئذ يوجد لكــل x_m التمثيــل

$$x_m = \xi_1^{(m)} e_1 + \cdots + \xi_n^{(m)} e_n.$$

ولما كانت M محدودة ، فان (x_m) تكون كذلك ، ولنفترض مثلا أن $\|x_m\| \leqq k$ أيا كان m . لذا فانه يترتب على التمهيدية ٢ــ٤ــ١ أن

$$k \geqq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geqq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^{(m)}|$$

حيث c عدد موجب . نستنتج من هذا أن المتتالية العددية $(\xi_j^{(m)})$ (j مثبت) محدودة ، وانه استنادا الى مبرهنة بولزانو ــ ڤيرشتراس يوجد لها نقطة تراكم ξ_j (لدينا هنا $1 \leqq j \leqq n$) . نستخلص من هذا كما فعلنا في برهان التمهيدية ٢ــ٤ــ١ أن (x_m) تحوي متتالية جزئية (z_m) تتقارب من $z = \sum \xi_j e_j$. وبما أن M مغلقة ، فان $z \in M$ ، وهذا يبين أنه يوجد لكل متتالية كيفية (x_m) في M متتالية جزئية تتقارب في M ، الامر الذي يقتضي كون M متراصة . ∎

تبين محاكمتنا السابقة أن المجموعات الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}^n$ (أو في فضاء منظم آخر منتهي البعد) هي بالضبط تلك المجموعات الجزئية المغلقة والمحدودة ، وبالتالي ، فان خاصة الانغلاق والمحدودية يمكن أن تسخر لتعريف التراص ، علما بأن هذا الامر لا يسري على حالة الفضاءات المنظمة غير منتهية البعد .

وتمدنا التمهيدية التالية التي تعزى الى ريس (عام ١٩١٨) بمعين آخر من نتائج هامة أخرى .

٢ــ٥ــ٤ تمهيدية ف. ريس

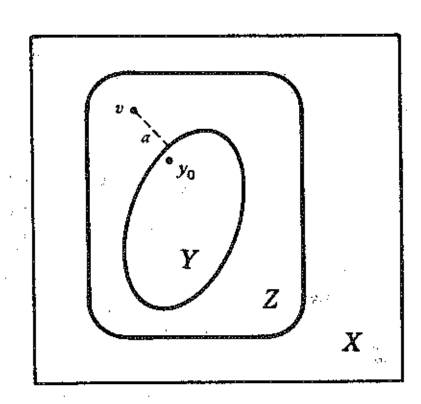
ليكن Z و Y فضاءين جزئيين من فضاء منظم X (أيا كان بعده) ، ولنفرض أن Y مغلق ومحتوى تماما في Z . عندئذ يوجد لكل عدد حقيقي θ من الفترة $(0, 1)$ عنصر z من Z بحيث أن

$$\|z\| = 1 \quad ، \quad \|z - y\| \geqq \theta \quad \text{لكل } y \in Y.$$

البرهان :

ليكن $v \in Z - Y$ ، ولنرمز لبعد v عن Y بالعدد a ، أي أن (راجع الشكل ١٩)

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$



الشكل (١٩) . تبيان الرموز الواردة في تمهيدية ريس

من الواضح أن $a > 0$ لكون Y مغلقا . لنأخذ الآن أي θ من $(0, 1)$. عندئذ نجد وفق تعريف الحد الادنى أنه يوجد y_0 من Y بحيث أن

$$a \leqq \|v - y_0\| \leqq \frac{a}{\theta} \tag{1}$$

(لاحظ أن $a/\theta > a$ نظرا لكون $0 < \theta < 1$) . لنفترض أن

$$z = c(v - y_0) \quad \text{حيث} \quad c = \frac{1}{\|v - y_0\|}$$

عندئذ يكون $\|z\| = 1$، وسنبين الآن أن $\|z - y\| \geqq \theta$ أيا كان y من Y . لدينا

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c\,\|v - y_0 - c^{-1}y\| \\ &= c\,\|v - y_1\| \end{aligned}$$

حيث

$$y_1 = y_0 + c^{-1}y.$$

وبما أن عبارة y_1 تبين أن y_1 عنصر من Y ، فاننا نجد أن $\|v-y_1\| \geqq a$ استنادا الى تعريف a • ونجد بوضع c خارجا واستعمال (1) أن

$$\|z-y\|=c\,\|v-y_1\| \geqq ca=\frac{a}{\|v-y_0\|} \geqq \frac{a}{a/\theta}=\theta.$$

وبما أن y عنصر اختياري من Y ، فاننا نكون قد أكملنا البرهان • ∎

ان الكرات المغلقة الواحدية في فضاء منظم منتهي البعد متراصة وفق المبرهنة ٢ـ٥ـ٣ • وبالعكس ، فان تمهيدية ريس تمدنا بالمبرهنة الهامة والشهيرة التاليـة •

٢ـ٥ـ٥ مبرهنة (البعد المنتهي)

اذا اتصف فضاء منظم X بان كانت الكرة الواحدية المغلقة $M=\{x \mid \|x\| \leqq 1\}$ متراصة فيه ، فان X منتهي البعد •

البرهـان :

لنفترض أن M متراصة ، الا أن $\dim X=\infty$ ، ولنبين أن هـذا يؤدي الـى تناقض • لنختر أي عنصر x_1 نظيمه 1 • ان هذا العنصر يولـد فضاء جزئيا X_1 وحيد البعد في X ، وهذا الفضاء الجزئي مغلق وفق ٢ـ٤ـ٣ ، ومحتوى تماما في X نظرا لكون $\dim X=\infty$ • واستنادا الى تمهيدية ريس ، فانه يوجد عنصر x_2 من X نظيمه 1 بحيث يكون

$$\|x_2-x_1\| \geqq \theta=\frac{1}{2}.$$

ان العنصرين x_1 و x_2 يولدان فضاء جزئيا X_2 ثنائي البعد مغلقا ومحتوى تماما في X • واستنادا الى تمهيدية ريس ، فانه يوجد عنصر x_3 من X نظيمه 1 بحيث أنه اذا كان x أي عنصر من X_2 فان

$$\|x_3-x\| \geqq \frac{1}{2}.$$

وبوجه خاص نجد أن

$$\|x_3 - x_1\| \geqq \frac{1}{2},$$

$$\|x_3 - x_2\| \geqq \frac{1}{2}.$$

واذا تابعنا هذا بالتدرج نجد متتالية (x_n) من عناصر M بحيث أن

$$\|x_m - x_n\| \geqq \frac{1}{2} \qquad (m \neq n).$$

ومن الواضح أن (x_n) لا يمكن أن تكون متتالية جزئية متقاربة ، وهذا يناقض حقيقة كون M متراصة • لذا فان افتراضنا بأن $\dim X = \infty$ غير صحيح ، وبالتالي فـان $\dim X < \infty$ • ∎

لهذه المبرهنة تطبيقات متنوعة ، وسنستخدمها في الفصـل الثامـن كأداة أساسية لدى دراستنا لما يسمى بالمؤثرات المتراصة •

ان أهمية المجموعات المتراصة تعود الى « سلوكها الجيد » ، فان لها خواص أساسية عديدة مشابهة لخواص المجموعات المنتهية ، وهذه الخواص لا تتمتع بها المجموعات غير المتراصة • وفيما يتعلق بالتطبيقات المستمرة ، فان احدى الخواص الرئيسية تنص على أن صور المجموعات المتراصة هي مجموعات متراصة ، الامر الذي يشكل موضوع المبرهنة التالية •

٢ـ٥ـ٦ مبرهنة (التطبيق المستمر)

ليكن X و Y فضاءين متريين و $T\colon X \longrightarrow Y$ تطبيقا مستمرا (١ـ٣ـ٣) • عندئذ تكون صورة مجموعة جزئية متراصة M من X وفق T متراصة •

البرهـان :

يكفي استنادا الى تعريف التراص أن نبين بأن كل متتالية (y_n) في الصورة $T(M) \subset Y$ تحوي متتالية جزئية تتقارب في $T(M)$ • بما أن $y_n \in T(M)$ ، فيوجد

عنصر x_n من M بحيث يكون $y_n = Tx_n$ • ولما كانت M متراصة ، فـان (x_n) تحوي متتالية جزئية (x_{n_k}) تتقارب في M • ان صورة (x_{n_k}) هي متتالية جزئية من (y_n) ، وهذه المتتالية الجزئية لابد أ نتتقارب في $T(M)$ وفـق ١ــ٤ــ٨ نظرا لكون T مستمرا • لذا فان $T(M)$ متراصة • ∎

نستنتج من هذه المبرهنة أن الخاصة التاليــة ، والمعروفة في نظرية الدوال الحقيقية لمتغير حقيقي ، تظل صحيحة في الفضاءات المترية •

٢ــ٥ــ٧ نتيجة (القيمة العظمى والقيمة الصغرى)

ان التطبيق المستمر T لمجموعة جزئية متراصة M مــن فضاء متري X في الفضاء $\mathbf{R}$ يدرك قيمته العظمى وقيمته الصغرى في نقطتين من M •

البرهـان :

ان المجموعة $T(M) \subset \mathbf{R}$ متراصة وفق المبرهنة ٢ــ٥ــ٦ ، وهذه المجموعــة مغلقة ومحدودة استنادا الى التمهيدية ٢ــ٥ــ٢ [لدى تطبيقها على $T(M)$] • لذا فان $\inf T(M) \in T(M)$ ، $\sup T(M) \in T(M)$ ، كما أن الصورتين العكسيتين لهاتين النقطتين تتألفان من تلك النقاط في M التي يدرك فيها Tx قيمة صغرى أو قيمة عظمى على الترتيب • ∎

مسـائل

١ ــ بيّن أن $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{C}^n$ ليسا متراصين •

٢ ــ أثبت أن الفضاء المتري المنقطع (١ــ١ــ٨) المؤلف من عدد غير منته مــن النقاط ليس متراصا •

٣ ــ أورد أمثلة على منحنيات متراصة وأخرى غير متراصة في المستوي $\mathbf{R}^2$ •

٤ ــ أثبت أنه كي تكون مجموعة جزئية غير منتهية M في الفضاء s (٢ــ٢ــ٨)

متراصة ، فمن الضروري وجود أعداد γ_1 و γ_2 و ••• بحيث أنه اذا كان $x=(\xi_k(x))\in M$ ، فان $|\xi_k(x)|\leqq\gamma_k$ • (يمكن البرهان على أن هذا الشرط كافٍ أيضا كي تكون M متراصة) •

٥ ــ **(التراص الموضعي)** • نقول عن فضاء متري X انــه **متراص موضعيا** اذا وجد لكل نقطة من X جوار متراص • بين أن الفضاءين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ بــل الفضاءين $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}^n$ متراصان موضعيا •

٦ ــ أثبت أن الفضاء المتري المتراص X متراص موضعيا •

٧ ــ اذا كان $\dim Y<\infty$ في تمهيدية ريس ٢ــ٥ــ٤ ، فأثبت أنــه يمكن حينئذ اختيــار $\theta=1$ أيضــا •

٨ ــ بيّن في المسألة ٧ من البند ٢ــ٤ بصورة مباشــرة (ودون اللجوء الــى ٢ــ٤ــ٥) أن هنالك عددا $a>0$ بحيث أن $a\|x\|_2\leqq\|x\|$ (استخدم ٢ــ٥ــ٧)•

٩ ــ اذا كان X فضاء متريا متراصا ، وكانت M مجموعة جزئية مغلقة في X ، فبين أن M متراصة •

١٠ــ ليكن X و Y فضاءين متريين و X فضاء متراصا • برهن أنه اذا كــان $T: X\longrightarrow Y$ تطبيقــا متباينا وغامــرا ومستمرا ، فــان T هوميومورفيزم (المسألة ٥ من البند ١ــ٦) •

٢ــ٦ المؤثــرات الخطيــة

ندرس في التحليل الحقيقي المحور الحقيقي $\mathbb{R}$ والدوال الحقيقية عليه (أو على جزء من $\mathbb{R}$) • من الواضح أن كلا من هذه الدوال هو تطبيق ساحته في $\mathbb{R}$ • أما في التحليل الدالي فاننا ندرس فضاءات أعم ، مثل الفضاءات المتريــة والفضاءات المنظمة ، والتطبيقات لهذه الفضاءات •

وفي حالة الفضاءات المتجهية ، وبوجــه خاص ، الفضاءات المنظمة ، فــان التطبيق يدعى **مؤثــرا** •

ثمة مؤثرات ذات أهمية خاصة لكونها « تحفظ » عمليتي الفضاء المتجهي الجبريتين ، الامر الذي يوضحه التعريف التالي .

٢-٦-١ تعريف (المؤثر الخطي)

المؤثر الخطي T هو مؤثر يحقق الشروط التالية :

(i) الساحة $\mathcal{D}(T)$ للمؤثر T فضاء متجهي ، والمدى $\mathcal{R}(T)$ يقع في فضاء متجهي على الحقل نفسه .

(ii) اذا كان x و y أي عنصرين من $\mathcal{D}(T)$ و α أي عدد فان

$$T(x+y)=Tx+Ty$$
$$T(\alpha x)=\alpha Tx. \tag{1}$$

ويجدر بنا توجيه النظر الى **الرموز** المستعملة . فاننا نكتب Tx عوضا عن $T(x)$ ، وهذا التبسيط متفق عليه في التحليل الدالي . كذلك، **فاننا سنستعمل فيما تبقى من الكتاب الرموز التالية :**

$\mathcal{D}(T)$ للدلالة على ساحة T .

$\mathcal{R}(T)$ للدلالة على مدى T .

$\mathcal{N}(T)$ للدلالة على الفضاء الصفري لـ T .

والفضاء الصفري لـ T هو بالتعريف مجموعة كل العناصر x من $\mathcal{D}(T)$ التي تحقق الشرط $Tx=0$. (وثمة كلمة أخرى تستعمل للدلالة على الفضاء الصفري هي « النواة » . الا أننا لن نتبنى هذه التسمية ، ذلك أننا سنحتفظ بها لغرض آخر في نظرية المعادلات التكاملية) .

علينا كذلك أن نقول شيئا عن استعمال الاسهم فيما يتعلق بالمؤثرات . ليكن $\mathcal{D}(T)\subset X$ و $\mathcal{R}(T)\subset Y$ حيث X و Y فضاءان متجهيان ، كلاهما حقيقي أو عقدي . عندئذ يكون T مؤثرا من $\mathcal{D}(T)$ (أي تطبيقا لـ $\mathcal{D}(T)$) على $\mathcal{R}(T)$ ، ونكتب

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathfrak{R}(T),$$

أو مؤثرا من $\mathfrak{D}(T)$ في Y ، ونكتب

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y.$$

واذا كان $\mathfrak{D}(T)$ هو الفضاء الكلي X ، عندئذ (وعندئذ فقط) نكتب

$$T: X \longrightarrow Y.$$

ومن الواضح أن الشرطين (1) يكافئان الشرط

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \tag{2}$$

فاذا أخذنا $\alpha = 0$ في (1) ، وجدنا الدستور التالي الذي نحتاج اليه مرارا في أبحاثنا المقبلة

$$T0 = 0. \tag{3}$$

يعبر الدستور (1) عن أن المؤثر الخطي T **هو هومورفيزم** (أو **تشاكل**)لفضاء متجهي (هو ساحة T) في فضاء متجهي آخـر ، أي أن T تحفظ عمليتي الفضاء المتجهي بالمعنى التالي: نجري أولا في اليسار من (1) عملية فضاء متجهي(عملية الجمع أو عملية الضرب بعدد) ، ومن ثم نأخذ صورة المتجه الناتج وفق T في Y ، في حين أننا في اليمين من (1) ، نأخذ أولا صورتي x و y وفق T في Y ، ومن ثم نجري عمليتي الفضاء المتجهي في Y ، وفي كلتا الحالين تكون النتيجة واحدة • ان هذه الخاصة تجعل المؤثرات الخطية تطبيقات هامـة • كذلك ، فان أهميـة الفضاءات المتجهية في التحليل الدالي تعزى بصورة أساسية للمؤثرات الخطيـة المعرفـة عليهـا •

سنورد الآن أمثلة أساسية على المؤثرات الخطية ، ونترك للقارىء التحـقق من خطية المؤثرات في كل حالة •

أمثلـة

٢ـ٦ـ٢ المؤثـر المطابق

يعرف **المؤثر المطابق** $I_X : X \longrightarrow X$ بالمساواة $I_X x = x$ أيا كان x من X •
سنكتب أيضا I فقط للدلالة على I_X ، وعندئذ يكون $Ix = x$ •

٢ـ٦ـ٣ المؤثر الصفري

يعرف **المؤثر الصفري** $0: X \longrightarrow Y$ بالمساواة $0x = 0$ أيا كان x من X •

٢ـ٦ـ٤ المفاضلة

ليكن X الفضاء المتجهي لكل الحدوديات على $[a, b]$ • من الممكن أن نعرف مؤثرا خطيا T على X بأن نضع

$$Tx(t) = x'(t)$$

أيا كان x من X ، حيث تعني الفتحة فوق x مشتق x بالنسبة الى t •
والمؤثر T هنا هو تطبيق لـ X على X •

٢ـ٦ـ٥ المكاملة

من الممكن تعريف مؤثر خطي T من $C[a, b]$ في $C[a, b]$ بالمساواة

$$Tx(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau \qquad t \in [a, b].$$

٢ـ٦ـ٦ الضرب بـ t

يمكن تعريف مؤثر خطي آخر T من $C[a, b]$ في $C[a, b]$ بالمساواة

$$Tx(t) = tx(t).$$

ويلعب هذا المؤثر دورا في الفيزياء (نظريــة الكم) ، الامــر الذي سنراه في الفصل الحادي عشر •

٢ــ٦ــ٧ جبر المتجهات الابتدائي

يحدد **الجداء المتجهي** عند تثبيت أحد المضروبين مؤثرا خطيــا $T_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ كذلــك فــان **الجداء العددي** يحدد عند تثبيت أحد المضروبين مؤثرا خطيــا $T_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، كأن يكون مثلا

$$T_2 x = x \cdot a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3$$

حيث $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^3$ متجه مثبت •

٢ــ٦ــ٨ المصفوفات

تعرف **المصفوفة** الحقيقية $A = (\alpha_{jk})$ ، التي عدد أسطرها r وعدد اعمدتها n ، مؤثرا خطيا $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$ عن طريق المساواة

$$y = Ax$$

حيث $x = (\xi_j)$ متجه ذو n من المركبات و $y = (\eta_j)$ متجــه ذو r من المركبات ، وحيث يكتب هذان المتجهان على شكل متجهين عموديين ، الامر الذي يتفق مع الاجماع المألوف في ضــرب المصفوفات • عندئذ يمكن كتابــة المساواة $y = Ax$ بالشــكل

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

ان T خطي نظرا لكون عملية ضرب المصفوفات خطية • واذا كانت A عقدية ، فانها تعرف مؤثرا خطيا من $\mathbb{C}^n$ في $\mathbb{C}^r$ • هــذا وسنورد مناقشة مفصلة حــول دور المصفوفات فيما يتعلق بالمؤثرات الخطية في البند ٢ــ٩ • ∎

يمكننا التحقق بسهولة في هذه الامثلة بأن كلا من المدى والفضاء الصفري للمؤثرات الخطية الواردة هي فضاءات خطية . ان هذه حقيقة عامة ، ولا تقتصر على الامثلة السابقة ، وسنبرهن الآن على صحتها ، ونرى كيف يمكن الافادة من الخطية في البراهين البسيطة . أما المبرهنة نفسها ، فسيكون لها تطبيقات متنوعة في أبحاثنا المقبلة .

٢-٦-٩ مبرهنة (المدى والفضاء الصفري)

اذا كان T مؤثرا خطيا ، فاننا نجد ما يلي :

(آ) المدى $\mathscr{R}(T)$ هو فضاء متجهي .

(ب) اذا كان $\dim \mathscr{D}(T) = n < \infty$ ، فان $\dim \mathscr{R}(T) \leqq n$.

(جـ) الفضاء الصفري $\mathscr{N}(T)$ هو فضاء متجهي .

البرهــان :

(آ) نأخذ أي عنصرين y_1 و y_2 من $\mathscr{R}(T)$ ، ونبين أنه أيا كان العــددان α و β فان $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathscr{R}(T)$. لما كان $y_1, y_2 \in \mathscr{R}(T)$ ، فهنالــك عنصــران $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$ بحيث أن $y_1 = Tx_1$ و $y_2 = Tx_2$ ، كما أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathscr{D}(T)$ نظرا لكون $\mathscr{D}(T)$ فضاء متجهياً . ان خطية T تقتضي أن يكون

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

اذن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathscr{R}(T)$. وبما أن العنصرين y_1 و y_2 من $\mathscr{R}(T)$ كيفيــان ، وأن العددين α و β كيفيان ، فان $\mathscr{R}(T)$ فضاء متجهي حقا .

(ب) لنختر المتجهات y_1 و .... و y_{n+1} من $\mathscr{R}(T)$ ، التي عددها $n+1$ ، بصورة كيفية . عندها توجد عناصــر x_1 و ... و x_{n+1} في $\mathscr{D}(T)$ بحيــث أن $y_1 = Tx_1$ و .... و $y_{n+1} = Tx_{n+1}$. ولما كان $\dim \mathscr{D}(T) = n$ ، فان المجموعــة $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ لابد أن تكون مرتبطة خطيا . وبالتالي فان

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

حيث $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ أعداد أحدها على الأقل مغاير للصفر • وبما أن T خطي وأن $T0=0$ ، فاننا نجد بتطبيق T على طرفي المساواة السابقة أن

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

وهذا يبين أن $\{y_1, \cdots, y_{n+1}\}$ مجموعة مرتبطة خطيا لان الاعداد α_j ليست مساوية للصفر معا • واذا تذكرنا بأن هذه المجموعة الجزئية من $\mathscr{R}(T)$ اختيرت بصورة كيفية ، فاننا نستنتج أن $\mathscr{R}(T)$ لا يحوي مجموعة جزئية مستقلة خطيا مؤلفة من $n+1$ أو أكثر من العناصر ، وهذا يعني تعريفا أن $\dim \mathscr{R}(T) \leqq n$ •

(جـ) لنأخذ أي عنصرين x_1 و x_2 من $\mathcal{N}(T)$ • عندئذ يكون $Tx_1 = Tx_2 = 0$ وبما أن T خطي ، فاننا نجد أن

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0.$$

أيا كان العددان α و β ، وهذا يبين بأن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$ • وبالتالي فان $\mathcal{N}(T)$ فضاء متجهي • ∎

وتجدر بنا الاشارة الى النتيجة المباشرة التالية من القسم (ب) من البرهان :

ان المؤثرات الخطية تحفظ الارتباط الخطي •

لننتقل الى عكس مؤثر خطي • نحن نذكر أولا بأنه يقال عن تطبيق $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ بأنه متباين اذا كان للنقاط المختلفة من ساحته صور مختلفة، أي أنه اذا كان $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$ ، فان

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad Tx_1 \neq Tx_2; \tag{4}$$

وهذا يكافىء قولنا أن

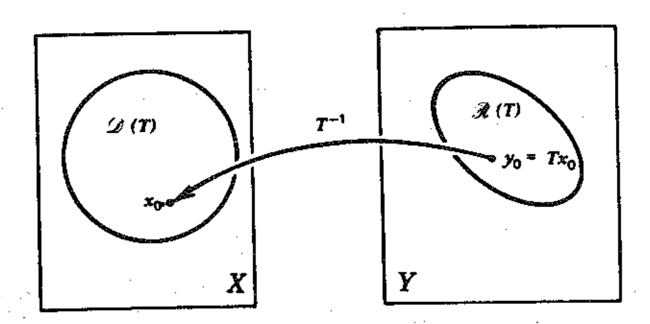
$$Tx_1 = Tx_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2. \tag{4*}$$

وفي هذه الحالة يوجد التطبيق

$$T^{-1}: \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T) \qquad (5)$$

$$y_0 \longmapsto x_0 \qquad (y_0 = Tx_0)$$

الذي ينقل كل نقطة y_0 في $\mathcal{R}(T)$ الى النقطة x_0 في $\mathcal{D}(T)$ بحيث يكون $Tx_0 = y_0$ (انظر الى الشكل ٢٠) • يسمى التطبيق T^{-1} **التطبيق العكسي** لـ T •



الشكل (٢٠) . الرموز المتعلقة بالتطبيق العكسي

من الواضح أن (5) تقتضي

$$T^{-1}Tx = x \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } \mathcal{D}(T)$$

$$TT^{-1}y = y \qquad \text{أيا كان } y \text{ من } \mathcal{R}(T)$$

هذا ، ونقابل في صدد المؤثرات الخطية على الفضاءات المتجهية الوضع التالي: الشرط اللازم والكافي لوجود عكس مؤثر خطي هو أن يكون الفضاء الصفري للمؤثر مؤلفا من المتجه الصفري دون غيره • وبصورة أدق فانه يرد المعيار المفيد التالي الذي سنستعمله مرارا في أبحاثنا القادمة •

٢ــ٦ــ١٠ مبرهنة (المؤثر العكسي)

ليكن X و Y فضاءين متجهيين كلاهما حقيقي او عقدي ، وليكن $T: \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T)$ مؤثرا خطيا ساحته $\mathcal{D}(T) \subset X$ ومداه $\mathcal{R}(T) \subset Y$ • عندئذ نجد ما يلي :

(أ) الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر العكسي $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ موجودا هو ان يكون

$$Tx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

(ب) اذا كان T^{-1} موجودا ، فانه مؤثر خطي .

(ج) اذا كان $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$ ، وكان T^{-1} موجودا ، فان $\dim \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$.

البرهان :

(آ) لنفترض أن $Tx = 0$ تقتضي $x = 0$. عندئذ نجد نظرا لكون T خطيا أن المساواة $Tx_1 = Tx_2$ تقتضي

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0,$$

وبالتالي فان $x_1 - x_2 = 0$ استنادا الى الفرض . يترتب على هذا أن $Tx_1 = Tx_2$ تقتضي $x_1 = x_2$ ، وأن T^{-1} موجود استنادا الى (*4) . وبالعكس ، فاذا كان T^{-1} موجودا ، فان (*4) صحيحة . نستنتج من (*4) عند وضع $x_2 = 0$ ومن (3) أن

$$Tx_1 = T0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0.$$

وبذا يكتمل اثبات (آ) .

(ب) سنفترض أن T^{-1} موجود ، ونبين أن T^{-1} يكون عندئذ خطيا . إن ساحة T^{-1} هي $\mathcal{R}(T)$ ، وهي فضاء خطي استنادا الى الشق (آ) من المبرهنة ٢-٦-٩ . لنأخذ أي عنصرين x_1 و x_2 من $\mathcal{D}(T)$ وصورتيهما

$$y_1 = Tx_1 \quad \text{و} \quad y_2 = Tx_2$$

عندئذ يكون

$$x_1 = T^{-1}y_1 \quad \text{و} \quad x_2 = T^{-1}y_2$$

وبما أن T خطي ، فاننا نجد أنه أيا كان العددان α و β ، فان

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2).$$

ونظرا لكون $x_j=T^{-1}y_j$ ، فـان

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$$

وهذا يثبت أن T^{-1} خطي •

(جـ) لدينا اعتمادا على الشـق (ب) مـن المبرهنة ٢ـ٦ـ٩ المتباينـة $\dim \mathscr{R}(T) \leqq \dim \mathscr{D}(T)$ والمتباينة $\dim \mathscr{D}(T) \leqq \dim \mathscr{R}(T)$ اعتمادا على المبرهنة عينها لدى تطبيقها على T^{-1} • ∎

سنورد الآن قاعدة مفيدة بشأن عكس مركـب مؤثرين خطيين • (لعـل القارىء قد سبق وتعرف اليها في حال المصفوفات المربعة) •

٢ـ٦ـ١١ تمهيدية (عكس الجداء)

ليكن $T: X \longrightarrow Y$ و $S: Y \longrightarrow Z$ مؤثرين خطيين متباينين وغامرين ، حيث X و Y و Z فضاءات متجهية (انظر الـى الشكل ٢١) • عندئذ يكـون العكـس $(ST)^{-1}: Z \longrightarrow X$ للجداء ST (اي للمركب ST) موجودا ، ويكون

$$(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}. \qquad (6)$$

البرهـان :

لما كان المؤثر $ST: X \longrightarrow Z$ متباينا وغامرا ، فان $(ST)^{-1}$ موجود • لذا فان

$$ST(ST)^{-1}=I_Z$$

حيث I_Z هو المؤثر المطابق علـى Z • وبتطبيـق S^{-1} واستعمال $S^{-1}S=I_Y$ (حيث I_Y هو المؤثر المطابق على Y) ، فاننا نجد أن

$$S^{-1}ST(ST)^{-1}=T(ST)^{-1}=S^{-1}I_Z=S^{-1}.$$

الشكل (٢١) • الرموز الواردة في التمهيدية ٢ــ٦ــ١١

فاذا طبقنا T^{-1} وأفدنا من أن $T^{-1}T = I_X$ ، فاننا نجد النتيجة المبتغاة وهي

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

وبذا يكتمل البرهان • ∎

مسـائل

١ ــ بين أن المؤثرات الواردة في ٢ــ٦ــ٢ و ٢ــ٦ــ٣ و ٢ــ٦ــ٤ خطية •

٢ ــ أثبت أن المؤثرات $T_1, \ldots, T_4$ من $\mathbf{R}^2$ في $\mathbf{R}^2$ المعرفة كما يلي :

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_1, 0)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (0, \xi_2)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_2, \xi_1)$$

$$(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2)$$

على التوالي ، هي مؤثرات خطية • أعط تأويلا هندسيا لكل منها •

٣ ــ حدد الساحة والمدى والفضاء الصفري لكل من المؤثرات $T_1, T_2,$ و في المسـألة ٢ •

٤ ــ ما هو الفضاء الصفري للمؤثر T_4 في المسألة ٢ ، وللمؤثرين T_1 و T_2 في ٢ــ٦ــ٧ ، وللمؤثر T في ٢ــ٦ــ٤ ؟

٥ ـ ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا • بين أن الصورة لفضاء جزئي V من X هي فضاء متجهي ، وأنه كذلك تكون الصورة العكسية لفضاء جزئي W من Y •

٦ ـ اذا كان جداء (مركب) مؤثرين خطيين موجودا ، فبين أنه خطي •

٧ ـ **(الخاصة التبديلية)** ليكن X فضاء متجهيا و $S: X \longrightarrow X$ و $T: X \longrightarrow X$ أي مؤثرين • نقول عن S و T انهما **تبديليان** اذا كان $ST = TS$ ، أي اذا كان $(ST)x = (TS)x$ أيا كان x من X • هل نستنتج من هذا التعريف أن T_1 و T_3 من المسألة ٢ تبديليان ؟

٨ ـ اكتب المؤثرين في المسألة ٢ مستعملا مصفوفات 2×2 •

٩ ـ اكتب $y = Ax$ في ٢ـ٦ـ٨ بدلالة المركبات ، وبين أن T خطي ، ثم أعط أمثلة على ذلك •

١٠ـ أورد صياغة للشرط الوارد في (آ) من ٢ـ٦ـ١٠ بدلالة الفضاء الصفري لـ T •

١١ـ ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل المصفوفات العقدية 2×2 ، ولنعرف $T: X \longrightarrow X$ بالمساواة $Tx = bx$ ، حيث b عنصر مثبت في X ، وحيث نرمز بـ bx الى الجداء المألوف لمصفوفتين • بين أن T خطي • حدد شروط وجود T^{-1} •

١٢ـ هل عكس المؤثر T في ٢ـ٦ـ٤ موجود ؟

١٣ـ ليكن $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا عكسه موجود • فاذا كانت $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا في $\mathscr{D}(T)$ ، فبين بأن المجموعة $\{Tx_1, \cdots, Tx_n\}$ تكون مستقلة خطيا •

١٤ـ اذا كان $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا وكان $\dim X = \dim Y = n < \infty$ ، فأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\mathscr{R}(T) = Y$ هو أن يكون T^{-1} موجودا •

١٥ـ لنأخذ الفضاء المتجهي X المؤلف من جميع الدوال الحقيقية المعرفة على $\mathbf{R}$

والتي لها مشتقات من جميع المراتب في كل نقطة من $\mathbf{R}$ ، ولنعرف $T: X \longrightarrow X$ بالمساواة $y(t) = Tx(t) = x'(t)$ • أثبت أن $\mathfrak{R}(T)$ يساوي X بأكمله ، الا أن T^{-1} ليس موجودا • قارن هذا بالمسألة ١٤ واعط التعليق المناسب •

٢ــ٧ المؤثرات الخطية المحدودة والمستمرة

لعل القارىء قد لاحظ أننا لم نستعمل النظائم في البند السابق كله • أما الآن فسندخل النظائم في اعتبارنا ، وذلك في التعريف الاساسي التالي •

٢ــ٧ــ١ تعريف (المؤثر الخطي المحدود)

ليكن X و Y فضاءين منظمين ، وليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا حيث $\mathfrak{D}(T) \subset X$ • نقول عن المؤثر T انه **محدود** اذا وجد عدد حقيقي c بحيث تتحقق المتباينة

$$\|Tx\| \leqq c\|x\|. \tag{1}$$

أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ • ∎

ان النظيم الوارد في الطرف الايسر من (1) هو ذاك المعرف على Y ، كما أن النظيم في الطرف الايمن هو ذاك المعرف على X • وقد رمزنا لكلا النظيمين بصيغة واحدة $\|\cdot\|$ وذلك بقصد التبسيط ، ودون أن يكون ثمة أي خطر للبس • ان التمييز باستعمال الادلة الدنيا ($\|x\|_0$ و $\|Tx\|_1$ و •••) يبدو غير ضروري هنا • ويبين الدستور (1) أن المؤثر الخطي المحدود ينقل المجموعات المحدودة في $\mathfrak{D}(T)$ الى مجموعات في محدودة Y ؛ وهذا ما حدا بالباحثين لتبني تسمية « المؤثر المحدود » •

تحذيـر :

تجدر الاشارة في هذا الصدد الى أن استعمالنا هنا للكلمة « محدود » مغاير لاستعمالنا لها في التحليل الحقيقي ، حيث نعني بالدالة المحدودة الدالة التـي يكون مداها مجموعة محدودة • ومن سوء الحـظ ، فكلا المصطلحين شـائع الاستعمال ، بيد أن خطر اللبس ليس بالكبير •

ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد c بحيث تبقى (1) صحيحة أيا كان العنصر غير الصفري x من $\mathscr{D}(T)$ ؟ [مـن الممكن اهمال $x=0$ لان $Tx=0$ عنـدما يكون $x=0$ استنادا الى (3) من ٢ـ٦] • اذا قسمنا طرفي (1) على $\|x\|$ نجـد أن

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqq c \qquad (x \neq 0)$$

وهذا يبين أن كبر c يجب أن يكون على الاقل بقدر الحد الاعلى للعبارة الواردة في اليسار عندما تمسح x المجموعة $\mathscr{D}(T)-\{0\}$ • لذا فان الاجابة عن سؤالنا حول أصغر قيمةممكنة تأخذها c في (1) هي أنها الحد الاعلى• فاذا رمزنا لهذهالكمية بـ $\|T\|$ ، فـان

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \qquad (2)$$

يسمى $\|T\|$ **نظيـم** المؤثر T • واذا كـان $\mathscr{D}(T)=\{0\}$ ، فاننا نكتـب $\|T\|=0$ تعريفا • وفي هذه الحالة (غير الهامة نسبيا) يكون $T=0$ لان $T0=0$ استنادا الى (3) من البند ٢ـ٦ •

لاحظ أن (1) يمكن أن تكتب بعد وضع $c=\|T\|$ بالشكل

$$\|Tx\| \leqq \|T\| \|x\|. \qquad (3)$$

وسنستعمل هذه الصيغة مرارا في أبحاثنا المقبلة •

وبالطبع ، فمن الضروري تبرير استعمال كلمة « النظيم » في هذا الصدد ، الامر الذي تقوم به التمهيدية التالية •

٢ـ٧ـ٢ تمهيدية (النظيم)

ليكن T مؤثرا خطيا محدودا كما عرفناه في ٢ـ٧ـ١ • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) ثمة صيغة بديلة لنظيم T محددة بالدستور

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \tag{4}$$

(ب) يحقق النظيم المعرف بالمساواة (2) الشروط (ن١) ـ (ن٤) من البند ٢ـ٢ •

البرهان :

(آ) اذا افترضنا أن $a = \|x\|$ وأن $y = (1/a)x$ ، حيث $x \neq 0$ ، فاننا نجد أن $\|y\| = \|x\|/a = 1$ ، وأنه يترتب على (2) بسبب خطية T أن

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{D}(T) \\ x \neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{a}x\right) \right\| = \sup_{\substack{y \in \mathscr{D}(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

واذا كتبنا x عوضا عن y في الطرف الايمن ، فاننا نجد (4) •

(ب) ان صحة (ن١) أمر واضح ، وكذلك صحة المساواة $\|0\| = 0$ • ويترتب على $\|T\| = 0$ أن $Tx = 0$ أيا كان x من $\mathscr{D}(T)$ ، وبالتالي فان $T = 0$ ، الامر الذي يبين صحة (ن٢) • وفضلا عن ذلك ، فان الشرط (ن٣) ينتج من

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \, \|Tx\| = |\alpha| \sup \|Tx\|$$

حيث $x \in \mathscr{D}(T)$ • وأخيرا فان (ن٤) هو نتيجة من

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1+T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x+T_2x\| \leqq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|;$$

حيث يكون x هنا عنصرا من $\mathscr{D}(T)$ • ∎

وقبل الشروع في دراسة الخواص العامة للمؤثرات الخطية المحدودة ، فاننا سنلقي نظرة على بعض الامثلة النموذجية ؛ الامر الذي يعطينا احساسا أفضل بمفهوم المؤثر الخطي المحدود •

أمثلــة

٢ـ٧ـ٣ المؤثر المطابق

ان المؤثر المطابق $I: X \longrightarrow X$ على فضاء منظم $X \neq \{0\}$ محدود ونظيمه $\|I\|=1$ (٢ـ٦ـ٢) •

٢ـ٧ـ٤ المؤثر الصفري

ان المؤثر الصفري $0: X \longrightarrow Y$ على فضاء منظم X محدود ونظيمه $\|0\|=0$ (٢ـ٦ـ٣) •

٢ـ٧ـ٥ مؤثر المفاضلة

ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من كل الحدوديات على $J=[0,1]$ ، حيث النظيم معطى بالمساواة $\|x\| = \max |x(t)|$ و $t \in J$ • يعرف مؤثر المفاضلة T على بالمساواة

$$Tx(t) = x'(t)$$

حيث ترمز اشارة الفتح الـى المفاضلة بالنسبة الى t • هـذا المؤثر خطي وليس محدودا ، وذلك لانـه اذا أخذنا $x_n(t)=t^n$ ، حيث $n \in \mathbf{N}$ ، فان $\|x_n\|=1$ ، كمـا أن

$$Tx_n(t)=x_n'(t)=nt^{n-1}$$

وبالتالي ، فان $\|Tx_n\|=n$ و $\|Tx_n\|/\|x_n\|=n$ • ولما كان العدد الطبيعي n كيفيا ، فاننا نكون قد أثبتنا عدم وجود عـدد مثبت c بحيث يكـون $\|Tx_n\|/\|x_n\| \leqq c$ • نستنتج من هذا ومن (1) أن T ليس محدودا •

بما أن المفاضلة عملية هامة ، فان نتيجتنا تبين بأن المؤثرات غير المحدودة هي أيضا ذات أهمية تطبيقية • وسنرى حقيقة هذا الامر في الفصلين العاشر والحادي عشر ، وذلك بعد أن نقوم بدراسة تفصيلية لنظرية المؤثرات المحدودة ولتطبيقاتها ، والتي هي أبسط من المؤثرات غير المحدودة •

٢ـ٧ـ٦ المؤثر التكاملي

يمكننا تعريف مؤثر تكاملي $T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ بالمساواة $y=Tx$ حيث

$$y(t)=\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

وحيث k هـي دالة معطاة ، تسمى **نـواة المؤثر** T ، ويفترض فيها أن تكـون مستمرة على المربع المغلق $G=J\times J$ في المستوي $t\tau$ ، حيـث $J=[0,1]$ • ان هذا المؤثر محدود •

لاثبات هذا نلاحظ أولا أن استمرار k على المربع المغلق يقتضي محدودية k ، ولنفترض مثلا أن $|k(t,\tau)| \leqq k_0$ أيا كان (t,τ) مـن G ، حيث k_0 عـدد حقيقي • وفضلا عن ذلك ، فان

$$|x(t)| \leqq \max_{t\in J}|x(t)|=\|x\|.$$

لـذا فـان

$$\|y\| = \|Tx\| = \max_{t \in J} \left| \int_0^1 k(t, \tau) x(\tau) \, d\tau \right|$$

$$\leqq \max_{t \in J} \int_0^1 |k(t, \tau)| \, |x(\tau)| \, d\tau$$

$$\leqq k_0 \|x\|.$$

وهذه النتيجة $\|Tx\| \leqq k_0 \|x\|$ ليست سوى (1) حيث $c = k_0$ • لذا فـان T محـدود •

٢ــ٧ــ٧ المصفوفـة

تعرف المصفوفة الحقيقية $A = (\alpha_{jk})$ التي عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n مؤثـرا $T: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^r$ عن طريق المساواة

$$y = Ax \tag{5}$$

حيث $x = (\xi_l)$ و $y = (\eta_j)$ متجهان عموديان عدد مركباتهما n و r على الترتيب ، وحيث استعملنا ضرب المصفوفات كما في ٢ــ٦ــ٨ • وتصبح المساواة (5) لدى استعمالنا للمركبات على النحو التالي

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k \qquad (j = 1, \cdots, r). \tag{5'}$$

ان T خطي نظرا لكون ضرب المصفوفات عملية خطية •

ان T محدود كذلك •

لاثبات هذا ، نذكر أولا من ٢ــ٢ــ٢ أن النظيم على $\mathbf{R}^n$ يعطى بالمساواة

$$\|x\| = \left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m^{\,2} \right)^{1/2};$$

ونجد نظيم y من $\mathbf{R}^r$ بصورة مماثلة • وهكـذا فانه يترتب على (5') وعلى متباينة كوشي ــ شفارتز (11) من البند ١ــ٢ أن

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{r}\eta_j^2=\sum_{j=1}^{r}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\xi_k\right]^2$$

$$\leqq\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{n}\xi_m^2\right)^{1/2}\right]^2$$

$$=\|x\|^2\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2.$$

واذا لاحظنا أن المجموع المزدوج في السطر الاخير لا يتعلق بـ x ، فيمكن كتابة نتيجتنا بالشكل

$$c^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^2 \qquad \text{حيث} \qquad \|Tx\|^2\leqq c^2\|x\|^2$$

وبذا نجد (1) ، الامر الذي يكمل البرهان على أن T محدود • ∎

هذا ، وسنعرض لدراسة دور المصفوفات في المؤثرات الخطية في بند منفصل (البند ٢ـ٩) • ان المحدودية خاصة نموذجية ، وهي تبسيط أساسي يرد في حالة البعد المنتهي كما نرى في المبرهنة التالية •

٢ـ٧ـ٨ مبرهنة (البعد المنتهي)

اذا كان الفضاء المنظم X منتهي البعد ، فان كل مؤثر خطي على X محدود •

البرهـان :

لنفترض أن $\dim X=n$ وأن $\{e_1,\cdots,e_n\}$ قاعدة لـ X • لنأخذ أي عنصر $x=\sum\xi_je_j$ ، ولننظر في أي مؤثر خطي T على X • لما كان T خطيا فان

$$\|Tx\|=\left\|\sum\xi_jTe_j\right\|\leqq\sum|\xi_j|\,\|Te_j\|\leqq\max_k\|Te_k\|\sum|\xi_j|$$

(يتم الجمع من 1 الى n) • وبتطبيق التمهيد ٢ـ٤ـ١ على المجموع الاخير مفترضين أن $\alpha_j=\xi_j$ و $x_j=e_j$ ، نجد أن

$$\sum|\xi_j|\leqq\frac{1}{c}\left\|\sum\xi_je_j\right\|=\frac{1}{c}\|x\|.$$

نستنتج مما سبق أن

$$\|Tx\| \leqq \gamma \|x\| \qquad \text{حيث} \qquad \gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

ويترتب على هذا وعلى (1) أن T محدود . ∎

ستتناول الآن بالدرس خواص عامة وهامة للمؤثرات الخطية المحدودة .

المؤثرات هي تطبيقات ، وبالتالي فان تعريف الاستمرار (١ــ٣ــ٣) ينطبق عليهـا .

ومن الحقائق الاساسية المتعلقة بالمؤثرات **الخطية** أن الاستمرار والمحدودية يغدوان مفهومين متكافئين ، وهاكم التفصيل .

ليكن $T:\mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ أي مؤثر ، ليس بالضرورة خطيـا ، حيث $\mathfrak{D}(T) \subset X$ ، وحيث X و Y فضاءان منظمان . ان التعريف ١ــ٣ــ٣ يقتضي بأن المؤثر T يكون **مستمرا في النقطة** x_0 من $\mathfrak{D}(T)$ اذا وجد لكل عــدد موجب ε عدد موجب δ بحيث يكون

$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ المحقق للشرط $\|x - x_0\| < \delta$.

ويكون T **مستمرا** اذا كان T مستمرا في كل نقطة x من $\mathfrak{D}(T)$.

واذا كان T خطيا فاننا نجد المبرهنة الشهيرة التالية :

٢ــ٧ــ٩ مبرهنة (الاستمرار والمحدودية)

ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا* ، حيـث $\mathfrak{D}(T) \subset X$ ، وحيث X و Y فضاءان منظمان . عندئذ نجد التالي :

---

* **تحذير** : مما يؤسف له ان بعض المؤلفين يطلقون على المؤثرات الخطية المستمرة اسم « المؤثرات الخطية » . اما نحن فلن نتبنى هذا المصطلح ، ذلك أن ثمـة مؤثرات خطية ذات اهمية من وجهة النظر التطبيقية دون أن تكـون هـذه المؤثرات مستمرة . وقد أوردنا مثالا على هـذا في ٢ــ٧ــ٥ ، كمـا سنورد مؤثرات اخرى في الفصلين العاشر والحادي عشر .

(آ) **الشرط اللازم والكافي كي يكون T مستمرا هو ان يكون محدودا .**

(ب) **اذا كان T مستمرا في نقطة واحدة فقط ، فانه مستمر .**

البرهـــان :

(آ) ان هذه الدعوى واضحة للعيان في الحالة $T=0$. لنفترض الآن أن $T\neq 0$. عندئذ يكون $\|T\|\neq 0$. سنفترض أولا أن T محدود ، ولنأخـذ أي عنصر x_0 من $\mathfrak{D}(T)$. ليكن ε أي عدد موجب . عندئذ نجد بسبب كـون T خطيا أنه اذا كان x أي عنصر من $\mathfrak{D}(T)$ يحقق الشرط

$$\|x-x_0\|<\delta \qquad \text{حيث} \qquad \delta=\frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

فـــان

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|\leqq\|T\|\|x-x_0\|<\|T\|\delta=\varepsilon.$$

وبما أن $x_0\in\mathfrak{D}(T)$ عنصر اختياري ، فاننا نستنتج أن T مستمر .

وبالعكس ، لنفترض أن T مستمر في نقطة اختيارية x_0 من $\mathfrak{D}(T)$. عندئذ نجد أنه اذا كان $\varepsilon>0$ عددا معطى ، فيوجد عدد $\delta>0$ بحيث تتحقق المتباينة

$$\|Tx-Tx_0\|\leqq\varepsilon \qquad (6)$$

أيا كان العنصر x من $\mathfrak{D}(T)$ الذي يحقق $\|x-x_0\|\leqq\delta$. لنأخذ الآن أي $y\neq 0$ في $\mathfrak{D}(T)$ ، ولنضع $x-x_0=\frac{\delta}{\|y\|}y$. عندئذ يكون $\|x-x_0\|=\delta$ الامر الذي يسمح لنا باستعمال (6) . ولما كان T خطيا ، فاننا نجد

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|=\left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\|=\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|$$

وعندئذ يترتب على (6) أن

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|\leqq\varepsilon \quad . \quad \text{اذن فـــان} \quad \|Ty\|\leqq\frac{\varepsilon}{\delta}\|y\| \; .$$

فاذا لاحظنا أن المتباينة الاخـيرة تكتب بالشكل $\|Ty\| \leqq c\|y\|$ ، حيث $c = \varepsilon\,\delta$ ، فاننا نستنتج أن T محدود •

(ب) ان استمرار T في نقطـة يقتضي محدودية T استنادا الى القسم الثاني من برهان (آ) ، وهذا بدوره يقتضي استمرار T وفق (آ) • ∎

٢ـ٧ـ١٠ نتيجة (الاستمرار ، الفضاء الصفري)

اذا كان T مؤثرا خطيا محدودا فان :

(آ) $x_n \longrightarrow x$ **[حيث** $x_n, x \in \mathfrak{D}(T)$ **] يقتضي** $Tx_n \longrightarrow Tx$ •

(ب) الفضاء الصفري $\mathcal{N}(T)$ **مغلق •**

البرهـان :

(آ) ان هذا الشق ينتج مـن (آ) مـن المبرهنة ٢ـ٧ـ٩ ومـن المبرهنة ١ـ٤ـ٨ معا أو مباشرة من (3) ، ذلك أنه عندما $n \longrightarrow \infty$ فاننا نجد أن

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leqq \|T\|\|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

(ب) يوجد لكل $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ متتالية (x_n) في $\mathcal{N}(T)$ بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ [راجع (آ) من ١ـ٤ـ٦] • لذا فان $Tx_n \longrightarrow Tx$ استنادا الى (آ) مـن هـذه النتيجة • كذلـك ، فـان $Tx = 0$ لان $Tx_n = 0$ ، وهـذا يقتضي أن يكـون $x \in \mathcal{N}(T)$ • وبما أن x عنصر اختياري من $\overline{\mathcal{N}(T)}$ ، فان $\mathcal{N}(T)$ مغلق • ∎

وتجدر بنا ملاحظة أن مدى مؤثر خطي محدود قد لا يكون مغلقا • (راجع المسألة ٦) •

ونترك للقارىء تقديم برهان بسيط لدستور مفيد آخر ، ألا وهو

$$\|T_1T_2\| \leqq \|T_1\|\|T_2\|, \qquad \|T^n\| \leqq \|T\|^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

حيث $T_2 : X \longrightarrow Y$ و $T_1 : Y \longrightarrow Z$ و $T : X \longrightarrow X$ مؤثـرات خطيـة محدودة ، وحيث X و Y و Z فضاءات منظمة • .

المؤثرات هي تطبيقات ، وقد أوردنا لـدى بحثنا للمؤثرات بعض المفاهيـم الناتجة عن كون المؤثر تطبيقا ، نذكر منها الساحة ، والمدى ، والفضاء الصفري لمؤثر • وسنضيف الآن مفهومين آخرين (المقصور والممدد) • وكان بامكاننا فعل ذلك في مرحلة أبكر ، الا أننا فضلنا ارجاء ذلك الى الآن ، حيث يمكننا أن نورد مباشرة مبرهنة هامة (٢ـ٧ـ١١) • لنبتدىء بتعريف تساوي مؤثرين على النحو التالـي :

نقول عن مؤثرين T_1 و T_2 انهما **متساويان** ، ونكتب

$$T_1 = T_2,$$

اذا كان لهما ساحة واحدة ، أي اذا كان $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$ ، وكان $T_1x = T_2x$ أيـا كـان x مـن $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$ •

ان **مقصور** مؤثر $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ على مجموعة جزئية B من $\mathfrak{D}(T)$ يرمز اليـه بالشكل

$$T|_B$$

وهو المؤثر المعرف بالشكل

$$T|_B.\ B \longrightarrow Y \quad \text{حيث} \quad T|_B x = Tx \quad \text{أيا كان } x \text{ من } B \text{ ،}$$

وممـدد مؤثر T الى مجموعة M تحوي $\mathfrak{D}(T)$ هو مؤثر

$$\tilde{T}: M \longrightarrow Y \qquad \text{بحيـث أن} \qquad \tilde{T}|_{\mathfrak{D}(T)} = T$$

أي أن $\tilde{T}x = Tx$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ • [لذا فان T مقصور $\tilde{T}$ على $\mathfrak{D}(T)$] •

اذا كانت $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة جزئية محتواة تمامـا في M ، فانه يوجد لمؤثـر معطى T عدة ممددات • ومن الممددات ذات الاهمية التطبيقية هي تلك التـي تحفظ خاصة أساسية محددة ، كخاصة الخطية مثلا (اذا اتفق وكان T خطيا) ،

أو خاصة المحدودية (اذا كانت $\mathfrak{D}(T)$ واقعة في فضاء منظم وكان T محدودا) • والمبرهنة الهامة التالية نموذجية في هذا الصدد ، اذ أنها تعنى بسمدد مؤثر خطي محدود T الى اللصاقة $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ للساحة ، بحيث يكون المؤثر الممدد محدودا أو خطيا أيضا ، وحتى له النظيم نفسه • ان هذا يشمل حالة التمديد من مجموعة كثيفة في فضاء منظم X الى الفضاء X كله • وهو يشمل أيضا حالة التمديد من فضاء منظم X الى اتمامه (٢ــ٣ــ٢) •

٢ــ٧ــ١١ مبرهنة (الممدد الخطي المحدود)

ليكن

$$T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$$

مؤثرا خطيا محدودا ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ واقعة في فضاء منظم X ، وحيث Y فضاء باناخ • عندئذ يوجد للمؤثر T ممدد هو

$$\tilde{T}: \overline{\mathfrak{D}(T)} \longrightarrow Y$$

حيث $\tilde{T}$ مؤثر خطي محدود نظيمه

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

البرهان :

ليكن x أي عنصر من $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ • نرى استنادا الى (آ) من المبرهنة ١ــ٤ــ٦ أنه توجد متتالية (x_n) في $\mathfrak{D}(T)$ بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ • ولما كان T خطيا ومحدودا ، فان

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

وهذا يبين أن (Tx_n) هي متتالية لكوشي ، نظرا لكون (x_n) متقاربة • وبما أن Y تام فرضا ، فان (Tx_n) متقاربة ، ولنفترض مثلا أن

$$Tx_n \longrightarrow y \in Y.$$

لنعرف الآن مؤثرا $\bar{T}$ بالمساواة

$$\bar{T}x = y.$$

سنبين أن هذا التعريف مستقل عن الطريقة التي نختار بها المتتالية في $\mathfrak{D}(T)$ المتقاربة من x • لـذا نأخـذ متتاليتين x_n و z_n بحيـث أن $x_n \longrightarrow x$ و $z_n \longrightarrow x$ • عندئذ نلاحظ أن $v_m \longrightarrow x$ ، حيث (v_m) هي المتتالية

$$(x_1, z_1, x_2, z_2, \cdots).$$

يترتب على هذا أن (Tv_m) تتقارب اعتمادا على (آ) من ٢ــ٧ــ١٠* ، وبالتالي ، فانه يجب أن يوجد للمتتاليتين الجزئيتين (Tx_n) و (Tz_n) مـن المتتالية (Tv_m) نهايةواحدة ، وهذا يثبت أنه توجد صورة وحيدة لكل عنصر x من $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ وفق $\bar{T}$ •

ولما كان واضحا أن $\bar{T}$ خطي وأن $\bar{T}x = Tx$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ ، فـان $\bar{T}$ ممدد للمؤثر T • فاذا أفدنا الآن من المتباينة

$$\|Tx_n\| \leqq \|T\| \|x_n\|$$

وجعلنا $n \longrightarrow \infty$ ، فاننا نجد أن $Tx_n \longrightarrow y = \bar{T}x$ • وبما أن $x \longmapsto \|x\|$ يعـرف تطبيقا مستمرا (٢ــ٢) فاننا نجد أن

$$\|\bar{T}x\| \leqq \|T\| \|x\|.$$

لذا فان $\bar{T}$ محدود و $\|\bar{T}\| \leqq \|T\|$ • وبالطبع فان $\|\bar{T}\| \geqq \|T\|$ بسبب كون النظيم (المعرف على أنه الحد الاعلى) لا يمكن أن ينقص لدى تمديده • نخلص مـن كل هذا الى أن $\|\bar{T}\| = \|T\|$ • ∎

---

* لا يجوز هنا الحكم على تقارب (Tv_m) استنادا الى الشق (آ) من النتيجـة ٢ــ٧ــ١٠ ، ذلك أنه كي يصح تطبيق هذه النتيجة ، لابد أن تكون النهاية x للمتتالية (v_m) منتمية الى $\mathfrak{D}(T)$ ، في حين انها ليست كذلك بالضرورة لانتماء x الى $\overline{\mathfrak{D}(T)}$. لذا وجب هنا اتباع طريق آخـر في اثبات تقارب (Tv_m) ، وليكن مثلا ذاك الذي اتبعناه قبل قليل لـدى اثبات تقارب (Tx_n) من y • (المترجم)

مسائل

١ ــ أثبت صحة (7) .

٢ ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين . أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي $T: X \longrightarrow Y$ محدودا هــو أن تكون الصور المباشرة للمجموعات المحدودة في X وفق T هي مجموعات محدودة في Y .

٣ ــ اذا كان $T \neq 0$ مؤثرا خطيا محدودا ، فبين أنه اذا كان x أي عنصر مــن $\mathcal{D}(T)$ يحقق الشرط $\|x\|<1$ ، فانه تصح المتباينة $\|Tx\|<\|T\|$.

٤ ــ هاتِ برهانا مباشرا على صحة (ب) من ٢ــ٧ــ٩ دون الافادة من (آ) فــي ٢ــ٧ــ٩ .

٥ ــ بين أن المؤثر $T: l^\infty \longrightarrow l^\infty$ المعرف بالدستور $y=(\eta_j)=Tx$ ، حيث $\eta_j=\xi_j/j$ و $x=(\xi_j)$ ، هو مؤثر خطي ومحدود .

٦ ــ **(المــدى)** . أثبت أنه ليس من الضروري أن يكون المدى $\mathcal{R}(T)$ لمؤثر خطي ومحدود $T: X \longrightarrow Y$ مغلقا في Y . **إرشــاد** . استعمل T الوارد في المســألة ٥ .

٧ ــ **(المؤثر العكسي)** . ليكن T مؤثرا خطيا محدودا من فضاء منظم X على فضاء منظم Y . فاذا وجد عدد موجب b بحيث أن

$$\|Tx\| \geqq b\|x\| \quad \text{أيا كان } x \text{ من } X$$

فبين أن $T^{-1}: Y \longrightarrow X$ يكون عندئذ موجودا ومحدودا .

٨ ــ بيــن أن المؤثــر العكسي $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \longrightarrow X$ لمؤثــر $T: X \longrightarrow Y$ خطــي ومحدود ، ليس محــدودا بالضرورة . **إرشــاد** . استعمل T الوارد فــي المســألة ٥ .

٩ ــ لنفترض أن $T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ مؤثر معرف بالمساواة

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

حدد كلا من $\mathcal{R}(T)$ و $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \longrightarrow C[0,1]$ ، ثم قرر ما اذا كان T^{-1} خطيا ومحـــدودا .

١٠ــ لنعرف على $C[0,1]$ المؤثر S المحدد بالمساواة

$$y(s) = s\int_0^1 x(t)\, dt,$$

والمؤثر T بالمساواة $y(s) = sx(s),$

هل S و T تبديليان ؟ عين كلا من $\|S\|$ و $\|T\|$ و $\|ST\|$ و $\|TS\|$.

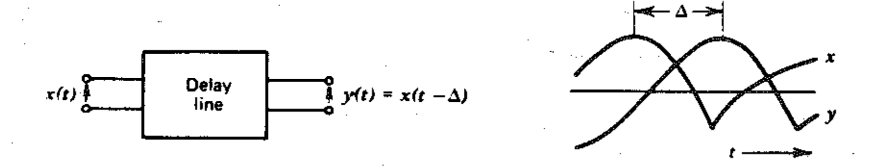
١١ــ ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من جميع الدوال الحقيقية والمحدودة على $\mathbb{R}$ ، حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|,$$

وليكن المؤثر $T\ \ X \longrightarrow X$ معرفا بالمساواة

$$y(t) = Tx(t) = x(t-\Delta)$$

حيث $\Delta>0$ ثابت . [ان هذا أنموذج (موديل) **لخط تاخير** ، وهـــو جهاز كهربائي مخرجه y متأخر عـــن المدخل x ، وزمن التأخر هو Δ ، انظر الى الشكل ٢٢] . هل T خطي ؟ هل هو محدود ؟



الشكل (٢٢) . خط التاخير الكهربائي

١٢ــ (**المصفوفات**) ۰ رأينا في ٢ــ٧ــ٧ أن المصفوفة $A=(\alpha_{jk})$ من المرتبة $r\times n$ تعرّف مؤثرا خطيا من الفضاء المتجهي X المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد في الفضاء المتجهي Y المؤلف من كل المرتبات r من الاعداد ۰ لنفترض أننا عرفنا على X نظيما ما $\|\cdot\|_1$ وعلى Y نظيما ما $\|\cdot\|_2$ ۰ نحن نذكر أن المسألة ١٠ من البند ٢ــ٤ تؤكد وجود نظائم مختلفة على الفضاء Z المؤلف من كل هذه المصفوفات (حيث ثبتنا r و n) ۰ نقول عن نظيم $\|\cdot\|$ على Z انه **منسجم** مع $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ اذا كان

$$\|Ax\|_2 \leqq \|A\|\|x\|_1.$$

بين أن النظيم المعرف بالمساواة

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}$$

منسجم مع $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ ۰ وغالبا ما يطلق على هذا النظيم اسم **النظيم الطبيعي** المعرف بالنظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ ۰ اذا اخترنا $\|x\|_1 = \max_j |\xi_j|$ و $\|y\|_2 = \max_j |\eta_j|$ ، فبين أن النظيم الطبيعي هو

$$\|A\| = \max_j \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|.$$

١٣ــ بين أنه يمكننا في ٢ــ٧ــ٧ ، حيث $r=n$ ، أن نعرف نظيما منسجما بالمساواة

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}{}^2\right)^{1/2},$$

الا أن هذا النظيم في الحالة $n>1$ **ليس** هو النظيم الطبيعي المعرف بالنظيم الاقليدي على $\mathbb{R}^n$ ۰

١٤ــ اذا اخترنا في المسألة ١٢

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|, \qquad \|y\|_2 = \sum_{j=1}^{r} |\eta_j|.$$

فبين أنه يمكن تحديد نظيم منسجم بالمساواة

$$\|A\| = \max_k \sum_{j=1}^{r} |\alpha_{jk}|.$$

١٥ـ بين أنه في الحالة $r=n$ ، فان النظيم الوارد في المسألة ١٤ هـو النظيم الطبيعي المتوافق مع النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ المعرفين في المسألة المذكورة •

٢ـ٨ الداليات الخطيـة

الدالي هو مؤثر يقع مداه في المحور الحقيقي $\mathbf{R}$ أو في المستوي العقدي $\mathbf{C}$ • ولم يكن التحليل الدالي في بداياته يعنى بغير تحليل الداليات • ولما كانت الداليات ترد كثيرا في موضوعنا ، فاننا سنستعمل رموزا خاصة بهـا • سنرمز للداليات نفسها بأحرف لاتينية صغيرة f و g و h و ••• ، ولساحة الدالي f بـ $\mathcal{D}(f)$ ، ولمداه بـ $\mathcal{R}(f)$ ، ولقيمة f في نقطة x مـن $\mathcal{D}(f)$ بـ $f(x)$ ، حيث نضـع x بـين قوسـين •

وبما أن الداليات هي مؤثرات ، فان كل التعاريف السابقة المتعلقة بالمؤثرات تسري على الداليات • وبوجه خاص ، فاننا سنحتاج الى التعريفين التاليين نظرا لكون أغلب الداليات التي سنتعامل معها في أبحاثنا المقبلة خطية ومحدودة •

٢ـ٨ـ١ تعريف (الدالي الخطي)

الدالي الخطي f هو مؤثر خطي ، تقع ساحته في فضاء متجهي X ، ومداه في الحقل العددي K للفضاء X • وهكذا فان

$$f: \mathcal{D}(f) \longrightarrow K,$$

حيث $K=\mathbf{R}$ اذا كان X حقيقيا ، و $K=\mathbf{C}$ اذا كان X عقديا • ∎

٢ـ٨ـ٢ تعريف (الدالي الخطي المحدود)

الدالي الخطي المحدود f هو مؤثر خطي محدود (٢ـ٧ـ١) ، يقع مــداه في الحقل العددي للفضاء المنظم X الذي تقع فيه الساحة $\mathfrak{D}(f)$. لــذا فهنالك عدد حقيقي c بحيث أنه أيا كان x من $\mathfrak{D}(f)$ فان

$$|f(x)| \leqq c\,\|x\|. \tag{1}$$

وفضلا عن ذلك ، فان **نظيــم** f هو [راجع (2) من البند ٢ـ٧]

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{2a}$$

أو

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|. \tag{2b}$$

يقتضي الدستور (3) من البند ٢ـ٧ أن

$$|f(x)| \leqq \|f\|\,\|x\|, \tag{3}$$

ونجد كحالة خاصة من المبرهنة ٢ـ٧ـ٩ ما يلي :

٢ـ٨ـ٣ مبرهنة (الاستمرار والمحدودية)

الشرط اللازم والكافي كي يكون الدالي الخطــي f الذي ساحته $\mathfrak{D}(f)$ واقعة في فضاء منظم مستمرا هو ان يكون f محدودا .

أمثلــة

٢ـ٨ـ٤ النظيــم

النظيم $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ على فضاء منظم $(X, \|\cdot\|)$ هو دالي على X ، وهــذا النظيم غير خطي .

يعين **الضرب العددي** المألوف لدى تثبيت أحد العاملين داليا $f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ وفق القاعدة

$$f(x) = x \cdot a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3,$$

حيث $a = (\alpha_i) \in \mathbf{R}^3$ متجــه مثبت •

ان f خطي • كذلك ، فان f محدود • وفي الحقيقة ، فلدينا

$$|f(x)| = |x \cdot a| \leqq \|x\|\|a\|,$$

وهكذا نجد أن $\|f\| \leqq \|a\|$ استنادا الى (2b) وذلك اذا أخذنا الحد الاعلى لكــل العناصر x التي نظيم كل منها يساوي 1 • ونجد من جهة ثانية عند أخذ $x = a$ واستخدام (3) أن

$$\|f\| \geqq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

لذا فان نظيم f هو $\|f\| = \|a\|$ •

٢ــ٨ــ٦ التكامل المحدد

التكامل المحدد هو عدد اذا أخذنا دالة واحدة ، كما نفعل غالبا في الحساب التكاملي الابتدائي • بيد أن الوضع يختلف تماما اذا أخذنا تكاملات كل الدوال في فضاء دالي معين ، اذ يغدو التكامل عندئذ داليا على ذلك الفضاء ، ولنرمز له بـ f • لنختر مثلا الفضاء $C[a, b]$ (٢ــ٢ــ٥)• عندئذ يعين f بالمساواة

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dt \qquad\qquad x \in C[a, b].$$

إن f خطي • سنثبت الآن أن f محدود ، وأن نظيمه هو $\|f\| = b - a$ •

في الحقيقة ، اذا كتبنا أن $J=[a,b]$ ، وتذكرنا صيغة النظيم على $C[a,b]$ ، فاننـا نجـد أن

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leqq (b-a)\max_{t\in J}|x(t)| = (b-a)\,\|x\|.$$

فاذا أخذنا الحد الاعلى عندما نأخذ كل العناصر x التي نظيم كل منها 1 ، وجدنا أن $\|f\| \leqq b-a$ • وللحصول على المتباينة $\|f\| \geqq b-a$ ، فاننا نختار العنصر الخاص $x = x_0 = 1$ الذي نظيمه $\|x_0\| = 1$ ، ونستعمل (3) فنجد

$$\|f\| \geqq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b-a.$$

٢ــ٨ــ٧ الفضـــاء $C[a,b]$

ثمة دالي ذو أهمية خاصة على $C[a,b]$ نجده اذا اخترنا عنصرا مثبتا t_0 من $J=[a,b]$ ، ووضعنا

$$f_1(x) = x(t_0) \qquad\qquad x \in C[a,b].$$

ان f_1 خطي • كذلك ، فان f_1 محدود ونظيمه $\|f_1\| = 1$ • وفي الحقيقة ، فان

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leqq \|x\|,$$

وهذا يقتضي المتباينة $\|f_1\| \leqq 1$ • كذلك ، فاذا اخترنا $x_0 = 1$ ، فان $\|x_0\| = 1$ ، ونجد عندئذ انطلاقا من (3) أن

$$\|f_1\| \geqq |f_1(x_0)| = 1.$$

٢ــ٨ــ٨ الفضـــاء l^2

يمكننا الحصول على دالي خطي f على فضاء هلبرت l^2 (١ــ٢ــ٣) وذلك باختيار عنصر مثبت $a = (\alpha_j) \in l^2$ ، وكتابة المساواة

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j$$

حيث $x=(\xi_j)\in l^2$ • ان هذه المتسلسلة تتقارب بالاطـلاق و f محدود ذلك أنـه يترتب على متباينة كوشي ــ شفارتز (11) من البند ١ــ٢ (حين يتم الجمع وفق j من 1 الى ∞) أن

$$|f(x)|=\left|\sum \xi_j\alpha_j\right| \leqq \sum |\xi_j\alpha_j| \leqq \sqrt{\sum |\xi_j|^2}\sqrt{\sum |\alpha_j|^2}=\|x\|\,\|a\|. \qquad \blacksquare$$

من الامور البالغة الاهمية معرفة أن مجموعة كل الداليات الخطية المعرفـة على فضاء متجهي X يمكن أن نحولها ذاتها الى فضاء متجهي • يرمز الـى هـذا الفضـاء بـ X^* ، ويسـمى **الفضاء الثنوي الجبري**(*) لـ X • وتعرف العمليتان الجبريتان عليه حينئذ بصورة طبيعيه عـلى النحو التالي • ان **المجموع** f_1+f_2 لداليين f_1 و f_2 هو الدالي s الذي قيمته في كل نقطة x من X هي

$$s(x)=(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x);$$

والجداء αf لعدد α بدالي f هو الدالي p الذي قيمته في النقطة x من X هي

$$p(x)=(\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

لاحظ أن هذا ينسجم والطريقة المعروفة في جمع الدوال وضربها بأعداد ثابتة •

لِنَسر خطوة أخرى الى الامام ، وذلك بأخـذ الثنوي الجبري $(X^*)^*$ لـ X^* ، الذي عناصره هي الداليات الخطية المعرفة على X^* • سنرمز لـ $(X^*)^*$ بـ X^{**} ، وسنطلق عليه اسم **الفضاء الثنوي الجبري الثاني** لـ X •

ان سبب ادخال الفضاء X^{**} في اعتبارنا يكمن في أنه يمكن الحصول على علاقة هامة بين X و X^{**} كما يلي • لنختر أولا الرموز

---

* لاحظ أن هذا التعريف لا يدخل فيه نظيم ، فالفضاء الذي يطلق عليـه اسم **الفضاء الثنوي** X' ، والمؤلف من كل الداليات الخطيـة **والمحدودة** عـلى X سنقابله في البند ٢ــ١٠ •

القيمة في نقطة	العنصر العام	الفضاء
—	x	X
$f(x)$	f	X^*
$g(f)$	g	X^{**}

من الممكن الحصول على $g \in X^{**}$ ، وهو دالي خطي معرف على X^* ، بأن نختار عنصرا مثبتا x من X وكتابة

$$g(f) = g_x(f) = f(x) \quad \text{(4)}$$

(x عنصر مثبت من X و f متغير في X^*)

ان وضع الدليل السفلي x هو تذكرة لنا بأننا حصلنا على g باستعمال عنصر معين x من X • وعلى القارىء أن يلاحظ بتأنٍ أن f هنا هو المتغير ، في حين أن x مثبت • واذا تذكرنا هذا ، فانـه يفترض فينا أن لا نجابه أي صعوبة في ادراك موضوعنا الحالي •

ان g_x كما عرفناه في (4) خطي ، وهذا أمر يمكن رؤيته مما يلي :

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2).$$

لذا فان g_x عنصر من X^{**} استنادا الى تعريف X^{**} •

بما أنه يقابل كل عنصر x من X عنصر g_x من X^{**} ، فانه يتحدد تطبيق هو

$$C: X \longrightarrow X^{**}$$
$$x \longmapsto g_x.$$

يدعى C **التطبيق القانوني** لـ X في X^{**} •

التطبيق C خطي لان ساحته هي فضاء متجهي ولان

$$\begin{aligned}(C(\alpha x + \beta y))(f) &= g_{\alpha x + \beta y}(f) \\ &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha (Cx)(f) + \beta (Cy)(f).\end{aligned}$$

يدعى C أيضا **الطمر القانوني** لـ X في X^{**} • ولادراك الباعث على هذه التسمية ، فاننا سنشرح أولا مفهوم « الايزومورفيزم » الهام •

تتعامل في أبحاثنا مع فضاءات متنوعة ، والمشترك بين هذه الفضاءات جميعا هو أن كلا منها يتألف من مجموعة ، ولنرمز لها بـ X ، ومن « بنية » معرفة على X • وهذه البنية في الفضاءات المترية هي المترك • أما في الفضاءات المتجهية ، فان ما يشكل البنية هو العمليتان الجبريتان على هذه الفضاءات • وفي الفضاءات المنظمة ، فان البنية مؤلفة من العمليتين الجبريتين ومن النظيم •

لنفترض أن X و $\tilde{X}$ فضاءان من نوع واحد(فضاءان متجهيان مثلا) • من المهم معرفة ما اذا كان X و $\tilde{X}$ « متطابقين في جوهرهما » ، بمعنى أنهما مختلفان على الاكثر في طبيعة نقاطهما • فاذا تم ذلك ، فمن الممكن اعتبار X و $\tilde{X}$ متطابقين (وكأنهما نسختان لفضاء « مجرد » واحد) عندما تكون البنية هي الهدف الاساسي في دراستنا للفضاءين ، في حين تكون طبيعة عناصرهما ليست بذي بال • ان هذا الوضع يرد غالبا ، و هو ما أوحى بمفهوم **الايزومورفيزم** (أو **التماكل**) ، الذي يعرف بأنه تطبيق متباين وغامر لـ X على $\tilde{X}$ ويحفظ البنية •

لذا فان **الايزومورفيزم** T لفضاء متري $X=(X, d)$ على فضاء متري $\tilde{X}=(\tilde{X}, \tilde{d})$ هو تطبيق متباين وغامر يحفظ المسافة ، أي أنه اذا كان x, y أي عنصرين من X فان

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y).$$

ونقول عندئذ أن $\tilde{X}$ **ايزومورفي** (أو **متماكل**) مع X • ان هذا ليس بجديد علينا ، اذ هو مجرد تسمية أخرى للدالة المتباينة والغامرة والايزومترية التي أوردناها في التعريف ١ــ٦ــ١ • أما الجديد فهو التالي •

الايزومورفيزم T **لفضاء متجهي** X على فضاء متجهي $\tilde{X}$ على الحقل نفسه هو تطبيق متباين وغامر يحفظ العمليتين الجبريتين للفضاء المتجهي • وهكذا فانه اذا كان x, y أي عنصرين من X ، وكان α أي عدد فان

$$T(x+y) = Tx + Ty, \qquad T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

أي أن $T: X \longrightarrow \tilde{X}$ هو مؤثر خطي متباين وغامر • يقال عن $\tilde{X}$ عندئذ إنـه **ايزومورفي** مع X ، ويدعى X و $\tilde{X}$ **فضاءين متجهيين ايزومورفيين** •

ان الايزومورفيزمات للفضاءات المنظمـة هـي ايزومورفيزمات الفضاءات المتجهية والتي أيضا تحفظ النظائم • وسنتطرق الى التفاصيل في البنـد ٢ـ١٠ حيث سنتعامل مع هذه الايزومورفيزمات • أمـا في الوقت الحاضر ، فيمكن أن نطبق تعريف ايزومورفيزمات الفضاء المتجهي كما في التالي •

من الممكن الاثبات بأن التطبيق القانوني C متباين • ولما كان C خطيا (كما في السابق) ، فانه ايزومورفيزم لـ X على المدى $\mathcal{R}(C)$ المحتوى في X^{**} •

اذا كان X ايزومورفيا مع فضاء جزئي من فضاء متجهي Y ، فاننا نقول إن X **طمور** في Y • لذا فان X طمور في X^{**} ، ويدعى C أيضا **الطمر القانوني** لـ X في X^{**} •

واذا كان C غامرا (وبالتالي تقابلا) ، فان $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ ، ويقـال عندئذ عن X انه **انعكاسي جبريا** • وسنثبت في البند القادم أنه اذا كان X منتهي البعد، فان X انعكاسي جبريا •

هذا ، وسنقدم مناقشة مماثلة تتعلق بالنظائم وتقود الى مفهوم **الانعكاسية** في الفضاء المنظم فيما بعد (في البند ٤ـ٦) ، وذلك بعد تطوير أدوات مناسبة (وبوجه خاص ، مبرهنة هان ـ باناخ الشهيرة) •

مسـائل

١ ـ أثبت أن الداليين الواردين في ٢ـ٨ـ٧ و ٢ـ٨ـ٨ خطيان •

٢ ـ بين بأن الداليين المعرفين $C[a, b]$ بالمساواتين

$$f_1(x) = \int_a^b x(t) y_0(t)\, dt \qquad (y_0 \in C[a, b])$$

$$f_2(x) = \alpha x(a) + \beta x(b) \qquad (\alpha, \beta \text{ fixed})$$

خطيان ومحدودان •

٣ ــ حدد النظيم للدالي الخطي f المعرف على $C[-1, 1]$ بالمساواة

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\, dt - \int_{0}^{1} x(t)\, dt.$$

٤ ــ بين بأن المساواتين

$$f_1(x) = \max_{t \in J} x(t)$$

$$J = [a, b]$$

$$f_2(x) = \min_{t \in J} x(t)$$

تحددان داليين على $C[a, b]$ • هل هما خطيان ؟ وهل هما محدودان ؟

٥ ــ بين بأنه يمكن أن نعرف على أي فضاء متتاليات X داليا خطيا f وذلك بوضع $f(x) = \xi_n$ (n مثبت) ، حيث $x = (\xi_j)$ • هل f محدود عندما يكون $X = l^\infty$ ؟

٦ ــ (**الفضاء $C'[a, b]$**) • الفضاء $C^1[a, b]$ أو $C'[a, b]$ هو الفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة على $J = [a, b]$ ، حيث يعرف النظيم بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| + \max_{t \in J} |x'(t)|.$$

بين بأن موضوعات النظيم محققة • أثبت أن $f(x) = x'(c)$ ، حيث $c = (a+b)/2$ ، يعرف داليا خطيا ومحدودا على $C'[a, b]$ • بين أنه اذا اعتبرنا f داليا على الفضاء الجزئي من $C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال التي لها مشتقات مستمرة ، فان f غير محدود •

٧ ــ اذا كان f داليا خطيا محدودا على فضاء منظم عقدي ، فهل يكون $\bar{f}$ محدودا ؟ وهل يكون خطيا ؟ (ان الخط ـ فوق f يرمز الى المرافق العقدي) •

٨ ــ (**الفضاء الصفري**) • **يعرف الفضاء الصفري** $N(M^*)$ لمجموعة M^*

محتواة في X^* بأنه مجموعة كل العناصر x من X بحيث يكون $f(x)=0$ أيا كان f من M^* • بين بأن $N(M^*)$ فضاء متجهي •

٩ ـــ ليكن $f\neq 0$ أي دالي خطي على فضاء متجهي X ، وليكن x_0 أي عنصر مثبت من $X-N(f)$ ، حيث $N(f)$ هو الفضاء الصفري لـ f • بين بأنه يوجد لاي x من X تمثيل وحيد بالشكل $x=\alpha x_0+y$ ، حيث $y\in N(f)$ •

١٠ـــ بين أن الشرط اللازم والكافي كي ينتمي عنصران x_1 و x_2 من X الى نفس العنصر من فضاء حاصل القسمة $X/N(f)$ في المسألة ٩ هو أن يكون $f(x_1)=f(x_2)$ • بين أن $\operatorname{codim} N(f)=1$ • (راجع المسألة ١٤ من البند ٢ـــ١) •

١١ـــ أثبت أنه اذا كان $f_1\neq 0$ و $f_2\neq 0$ داليين خطيين معرفين على فضاء متجهي واحد ، ولهما فضاء صفري واحد ، فانهما متناسبان •

١٢ـــ **(المستوي)** • اذا كان Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X وكان $\operatorname{codim} Y=1$ ، (راجع المسألة ١٤ من البند ٢ـــ١) ، فانه يقال عن كل عنصر من X/Y انه **مستو مواز** لـ Y • بين أنه اذا كان $f\neq 0$ أي دالي خطي على X ، فان المجموعة $H_1=\{x\in X \mid f(x)=1\}$ تمثل مستويا موازيا للفضاء الصفري $N(f)$ لـ f •

١٣ـــ اذا كان Y فضاء جزئيا من فضاء متجهي X ، وكان f داليا خطيا على X بحيث أن $f(Y)$ ليس الحقل العددي الكلي لـ X ، فبين أن $f(y)=0$ أيا كان y من Y •

١٤ـــ بين بأنه اذا كان $\|f\|$ نظيما لدالي خطي محدود $f\neq 0$ على فضاء منظم X ، فان $\|f\|$ يؤوّل هندسيا بأنه عكس المسافة $\tilde{d}=\inf\{\|x\| \mid f(x)=1\}$ الفاصلة بين المستوي $H_1=\{x\in X \mid f(x)=1\}$ والمبدأ •

١٥ـــ **(نصف الفضاء)** ليكن $f\neq 0$ داليا خطيا محدودا على فضاء منظم حقيقي X • عندئذ يوجد لكل عدد c مستو $H_c=\{x\in X \mid f(x)=c\}$ ، ويعرف H_c **نصفي الفضاء**

$$X_{c1}=\{x \mid f(x)\leqq c\} \quad \text{و} \quad X_{c2}=\{x \mid f(x)\geqq c\}.$$

بين بأن الكرة المغلقة الواحدية تقع في X_{c1} ، حيث $c=\|f\|$ ، في حين أنه لايوجد عدد موجب ε بحيث يحوي نصف الفضاء X_{c1} ، بفرض $c=\|f\|-\varepsilon$ ، الكرة المذكورة •

٢ــ٩ المؤثرات والداليات الخطية على الفضاءات منتهية البعد

الفضاءات المتجهية منتهية البعد أبسط من الفضاءات المتجهية غير منتهية البعد ، ومن الطبيعي أن نتساءل عن ماهية التبسيط الذي يصيب المؤثرات والداليات الخطية المعرفة على مثل هذه الفضاءات • هذا هو السؤال الذي سندرسه في هذا البند ، وسيوضح الجواب عنه دور المصفوفات (المنتهية) في صدد المؤثرات الخطية ، وأيضا بنية الثنوي الجبري X^* (البند ٢ــ٨) لفضاء متجهي منتهي البعد X •

من الممكن تمثيل المؤثرات الخطية على فضاءات متجهية منتهية البعد بدلالة المصفوفات ، كما سنرى بعد قليل • وبهذه الطريقة ، تغدو المصفوفات أهم أداة في دراسة المؤثرات الخطية في حالة البعد المنتهي • وفي هذا السياق ، علينا أيضا أن نتذكر المبرهنة ٢ــ٧ــ٨ إن نحن أردنا الاحاطة التامة بموضوعنا الحالي • والتفاصيل هي على النحو التالي :

ليكن X و Y فضاءين متجهين منتهيي البعد على الحقل نفسه ، وليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا • لنختر قاعدة $E=\{e_1, \cdots, e_n\}$ لـ X وأخرى $B=\{b_1, \cdots, b_r\}$ لـ Y ، حيث المتجهات مرتبة بطريقة نبقيها ثابتة • عندئذ يوجد لكل x من X التمثيل الوحيد

$$x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_n e_n. \qquad (1)$$

وبما أن T خطي ، فان صورة x هي

$$y=Tx=T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n} \xi_k Te_k. \qquad (2)$$

ولما كان التمثيل (1) وحيدا ، فاننا نقع على النتيجة الاولى وهي :

يتحدد المؤثر T بصورة وحيدة اذا كانت الصور $y_k = Te_k$ لمتجهات القاعدة $e_1, \ldots, e_n$ معينة مسبقا .

وبما أن y و $y_k = Te_k$ واقعة في Y ، فانه يوجد لها تمثيلات وحيدة من النمط

$$(3)\quad \begin{aligned} &(a) & y &= \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j \\ &(b) & Te_k &= \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j. \end{aligned}$$

ونجد بعد التعويض في (2) أن

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Te_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \right) b_j.$$

و نظرا لكون المتجهات b_j تشكل مجموعة مستقلة خطيا ، فان معاملات كل من b_j في اليسار وفي اليمين يجب أن تكون واحدة ، أي أ ن

$$(4)\qquad \eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \qquad j = 1, \cdots, r.$$

يترتب على هذا النتيجة الثانية وهي :

يمكن الحصول على الصورة $y = Tx = \sum \eta_j b_j$ للعنصر $x = \sum \xi_k e_k$ من المساواة (4) .

لاحظ الوضع غير العادي لدليل الجمع j لـ τ_{jk} في (3b) ، وهذا ضروري كي نصل الى الوضع العادي لدليل الجمع في (4) .

تشكل المعاملات في (4) المصفوفة

$$T_{EB} = (\tau_{jk})$$

التي عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n . واذا أعطيت قاعدة E لـ X وأخرى B

لـ Y ، حيث تكون العناصر في E و B مرتبة وفق نظام معين (اختياري لكن مثبت) فان المصفوفة T_{EB} تكون محددة بصورة وحيدة بالمؤثر الخطي T .
ونقول ان المصفوفة T_{EB} تمثل المؤثر T بالنسبة لهاتين القاعدتين .

واذا استعملنا المتجهين العموديين $\bar{x}=(\xi_k)$ و $\bar{y}=(\eta_j)$ ، فانه يمكن كتابة (4) باستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\bar{y} = T_{EB}\bar{x}. \tag{4'}$$

كذلك ، فمن الممكن كتابة (3b) باستخدام المصفوفات على النحو التالي

$$Te = T_{EB}{}^{T} b \tag{3b'}$$

حيث Te المتجه العمودي الذي مركباته $Te_1, \ldots, Te_n$ (التي هي نفسها متجهات) ، وحيث b المتجه العمودي الذي مركباته $b_1, \ldots, b_r$ ، علما بأنه علينا استعمال المنقول $T_{EB}{}^{T}$ لـ T_{EB} لاننا في (3b) نجمع وفق j ، وهو الدليل السفلي الاول ، في حين أننا في (4) نجمع وفق k ، هو الدليل السفلي الثاني .

نستنتج مما تقدم أن المؤثر الخطي T يحدد مصفوفة وحيدة ممثلة لـ T بالنسبة الى قاعدة معطاة لـ X وقاعدة معطاة لـ Y ، حيث يفترض في متجهات كل من هاتين القاعدتين أن تكون مرتبة وفق نظام مثبت . وبالعكس ، فان كل مصفوفة عدد أسطرها r وعدد أعمدتها n تحدد مؤثرا خطيا تمثله بالنسبة لقاعدتين مفروضتين لـ X و Y . (راجع أيضا ٢ــ٦ــ٨ و ٢ــ٧ــ٧) .

لننتقل الآن الى **الداليات الخطية** على X ، بفرض أن $\dim X = n$ وأن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X كما في السابق . وجدنا في البند السابق أن هذه الداليات تشكل الفضاء الثنوي الجبري X^* لـ X . واذا كان f أي دالي من هذه الداليات ، وكان $x = \sum \xi_j e_j$ أي عنصر من X فان

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j \tag{5a}$$

حيث يكون

$$\alpha_j = f(e_j) \qquad j = 1, \cdots, n, \qquad \textbf{(5b)}$$

ويكون f محددا بصورة وحيـــدة بقيمه α_i في متجهات القاعدة لـ X التـــي عددهـــا n •

وبالعكس ، فان كل مرتبة n من الاعداد α_1 ، $\cdots$ ، α_n تحدد داليا خطيا على X وفق (5) • لنأخذ بوجه خاص المرتبات n التالية :

$$\begin{array}{cccccc}
(1, & 0, & 0, & \cdots & 0, & 0) \\
(0, & 1, & 0, & \cdots & 0, & 0) \\
. & . & . & \cdots & . & . \\
(0, & 0, & 0, & \cdots & 0, & 1).
\end{array}$$

ان هذه المرتبات تعطي استنادا الى (5) n من الداليات ، سنرمز لهـــا بـ f_1 ، $\cdots$ ، f_n حيث تتحدد قيمها كما يلي :

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k, \\ 1 & \text{if } j = k; \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

أي أن قيمـــة f_k تساوي 1 في متجه القاعدة الذي ترتيبه k ، وتساوي 0 في متجهات القاعدة الباقية (التـــي عددها $n-1$) • يسمى δ_{jk} **دلتاكرونيكر** ، كما تسمى $\{f_1, \cdots, f_n\}$ **القاعـــدة الثنوية** لقاعدة X وهي $\{e_1, \cdots, e_n\}$ • وهذا مبرر بالمبرهنة التالية •

٢-٩-١ مبرهنة (بعد X^*)

اذا كان X فضـــاء متجهيا بعـــده n ، وكانـــت $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعـــدة لـ X ، فان $F = \{f_1, \cdots, f_n\}$ المحددة بالمساويات (6) تشكل قاعـــدة للثنـــوي الجبري X^* لـ X ، كما يكون $\dim X^* = \dim X = n$ •

البرهان :

ان F مستقلة خطيا ذلك أن المساواة

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0 \qquad (x \in X) \qquad (7)$$

عندما $x = e_j$ تقتضي أن يكون

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{jk} = \beta_j = 0,$$

لذا فان كل المعاملات β_k في (7) أصفار • سنبين أن كل f من X^* يمكن تمثيله على شكل تركيب خطي لعناصر F بصورة وحيدة • لنكتب $f(e_j) = \alpha_j$ كما في (5b) • نجد استنادا الى (5a) أن

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j$$

أيا كان x من X • كذلك ، فاننا نجد استنادا الى (6) أن

$$f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_j.$$

وبالتالي فان

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x).$$

لذا فان التمثيل الوحيد للدالي الخطي الكيفي f على X بدلالة الداليات $f_1, \cdots, f_n$ هو

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$ ∎

سنورد تطبيقا هاما لهذه المبرهنة ، ولهذا الغرض سنثبت أولا صحة التمهيد التالي • (سنقدم تمهيدا مماثلا يتعلق بالفضاءات المنظمة الاختيارية فيما بعد ، وعلى وجه التحديد في ٤ـ٣ـ٤) •

٢ـ٩ـ٢ تمهيدية (المتجه الصفري)

ليكن X فضاء متجهيا منتهي البعد . فاذا كان العنصر x_0 من X يحقق المساواة $f(x_0)=0$ أيا كان f من X^* ، فان $x_0=0$.

البرهان :

لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ قاعدة لـ X ، وليكن $x_0=\sum \xi_{0j}e_j$. عندئذ تصبح (5) بالشكل

$$f(x_0)=\sum_{j=1}^{n} \xi_{0j}\alpha_j.$$

وبما أن هذا المقدار مساو للصفر أيا كان f من X^* فرضا ، أي أنه مساو للصفر أيا كان اختيارنا للاعداد $\alpha_n, \cdots, \alpha_1$ ، فان كل المقادير ξ_{0j} يجب أن تساوي الصفر . ∎

يمكننا الآن أن نجد باستخدام هذه التمهيدية المبرهنة التالية :

٢ـ٩ـ٣ مبرهنة (الانعكاسية الجبرية)

كل فضاء متجهي منتهي البعد لابد وأن يكون انعكاسيا جبريا .

البرهان :

ان التطبيق القانوني $C: X \longrightarrow X^{**}$ الذي أوردناه في البند السابق خطي . وتعني المساواة $Cx_0=0$ أنه أيا كان f من X^* فان

$$(Cx_0)(f)=g_{x_0}(f)=f(x_0)=0,$$

استنادا الى تعريف C . ولما كان هذا يقتضي أن يكون $x_0=0$ وفق التمهيدية ٢ـ٩ـ٢ ، فانه يترتب على المبرهنة ٢ـ٦ـ١٠ أنه يوجد للتطبيق C تطبيق عكسي $C^{-1}: \mathcal{R}(C) \longrightarrow X$ حيث $\mathcal{R}(C)$ مدى C . كذلك ، فانه يترتب على المبرهنة ذاتها

أن $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X$ ، ونجد اعتمادا على المبرهنة ٢ــ٩ــ١ أن

$$\dim X^{**} = \dim X^{*} = \dim X.$$

نستنتج من كل ما تقدم أن $\dim \mathcal{R}(C) = \dim X^{**}$ ، لذا فان $\mathcal{R}(C) = X^{**}$ نظرا لكون $\mathcal{R}(C)$ فضاء متجهيا (٢ــ٦ــ٩) ، ويكون بعد كل فضاء جزئي تماما من X^{**} أقل من $\dim X^{**}$ استنادا الى المبرهنة ٢ــ١ــ٨ ، وهذا يثبت تعريف الانعكاسية الجبرية المطلوبة ، ∎

مسائل

١ ــ حدد الفضاء الصفري للمؤثر $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ الممثل بالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٢ ــ ليكن المؤثر $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ معرفا بـ $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \longmapsto (\xi_1, \xi_2, -\xi_1 - \xi_2)$ ، حدد $\mathcal{R}(T)$ و $\mathcal{N}(T)$ ومصفوفة تمثل T ،

٣ ــ عين قاعدة ثنوية للقاعدة $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ لـ $\mathbb{R}^3$ ،

٤ ــ لتكن $\{f_1, f_2, f_3\}$ القاعدة الثنوية لـ $\{e_1, e_2, e_3\}$ لـ $\mathbb{R}^3$ ، حيث $e_1 = (1, 1, 1)$ و $e_2 = (1, 1, -1)$ و $e_3 = (1, -1, -1)$ ، جد $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ ، حيث $x = (1, 0, 0)$ ،

٥ ــ اذا كان f داليا خطيا على فضاء متجهي X بعده n ، فما هو البعد الذي يمكن أن يكون للفضاء الصفري $\mathcal{N}(f)$ ؟

٦ ــ جد قاعدة للفضاء الصفري للدالي f المعرف على $\mathbb{R}^3$ بالمساواة $f(x) = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3$ حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ،

٧ — أعد نفس الطلب الوارد في المسألة ٦ وذلك بافتراض أن $f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3$ حيث $\alpha_1\neq 0$ •

٨ — اذا كان Z فضاء جزئيا بعده $(n-1)$ من فضاء متجهي X بعده n ، فبين أن Z هو الفضاء الصفري لدالي خطي مناسب f على X يتحدد بصورة وحيدة مقربا الى مضروب عددي •

٩ — ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الحدوديات الحقيقية لمتغير حقيقي والتي درجة كل منها أصغر من عدد معطى n ، ومن الحدودي $x=0$ (الذي تترك درجته دون تحديد لدى تعريف الدرجة) • لتكن $f(x)=x^{(k)}(a)$ قيمة المشتق من المرتبة k (k مثبت) للعنصر x من X في نقطة a من $\mathbb{R}$ • أثبت أن f دالي خطي على X •

١٠ — ليكن Z فضاء جزئيا من فضاء متجهي X بعده n ، وليكن x_0 عنصرا من $X-Z$ • بين أن هنالك داليا خطيا f على X بحيث أن $f(x_0)=1$ ، وأن $f(x)=0$ أيا كان x من Z •

١١ — اذا كان x و y متجهين مختلفين في فضاء متجهي منتهي البعد X ، فبين أنه يوجد دالي خطي f على X بحيث يكون $f(x)\neq f(y)$ •

١٢ — اذا كانت $f_1, \dots, f_p$ داليات خطية على فضاء متجهي X بعده n ، حيث $p<n$ ، فبين أن ثمة متجها $x\neq 0$ في X بحيث يكون $f_1(x)=0, \dots, f_p(x)=0$ • ما هي النتائج التي نستخلصها من هذا بالنسبة الى المعادلات الخطية ؟

١٣ — **(المدد الخطي)** • ليكن Z فضاء جزئيا تماما من فضاء متجهي X بعده n ، وليكن f داليا خطيا على Z • بين أنه يمكن تمديد f خطيا الى X ، أي أنه يوجد دالي خطي $\tilde{f}$ على X بحيث يكون $\tilde{f}|_Z=f$ •

١٤ — ليكن f داليا على $\mathbb{R}^2$ معرفا بالمساواة $f(x)=4\xi_1-3\xi_2$ ، حيث $x=(\xi_1, \xi_2)$ • لننظر الى $\mathbb{R}^2$ على أنه فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ محدد بالمساواة $\xi_3=0$ • عين كل الممدات الخطية $\tilde{f}$ للدالي f من $\mathbb{R}^2$ الى $\mathbb{R}^3$ •

١٥ـ ليكن $Z \subset \mathbb{R}^3$ فضاء جزئيا معرفا بالمساواة $\xi_2 = 0$ • وليكن f علـى Z محددا بالدستور $f(x) = (\xi_1 - \xi_3)/2$ • جد ممددا خطيا $\tilde{f}$ لـ f الى $\mathbb{R}^3$ بحيث يكون $\tilde{f}(x_0) = k$ (k عدد مثبت معطى) ، وذلك بفرض أن $x_0 = (1, 1, 1)$ • هـل $\tilde{f}$ وحيـد ؟

٢ـ١٠ الفضاءات المنظمة للمؤثرات • الفضاء الثنوي

لقد عرفنا في البند ٢ـ٧ المؤثر الخطي المحدود ، وأوضحناه بأمثلة أساسية خلفت لدى القارىء انطباعا أوليا عن أهمية هذا النوع من المؤثرات • أما في هذا البند فان هدفنا هو التالي : نأخذ أي فضاءين منظمين X و Y (كلاهما حقيقي أو كلاهما عقدي) ، وننظر في المجموعة

$$B(X, Y)$$

المؤلفة من كل المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y ، أي في المؤثرات التي كل منها معرف على X بأكمله ومداه واقـع في Y ، ونريد أن نبـين بأن المجموعـة $B(X, Y)$ يمكن أن تجعل نفسها فضاء منظما(*) •

ان هذا ليس بالامر العسير ، ذلك أننا أولا نحول المجموعة $B(X, Y)$ الـى فضاء متجهي بتعريف المجموع $T_1 + T_2$ لمؤثرين T_1 و T_2 من $B(X, Y)$ بطريقـة طبيعية بالمساواة

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x$$

وتعريف الجداء αT لمؤثر T من $B(X, Y)$ بالعدد α بالمساواة

$$(\alpha T)x = \alpha T x.$$

* ان B في $B(X, Y)$ تعني الحرف الاول من الكلمة الانجليزية "bounded." ، اي « محدود » . ويستعمل رمز اخر أحيانابدلامن $B(X, Y)$ هو $L(X, Y)$ ، حيث L تعني الحرف الأول من الكلمة الانجليزية "linear." أي « خطي » . ورغم أن كلا من المصطلحين شائع ، الا اننا سنتمسك بالمصطلح $B(X, Y)$ في كتابنا .

فاذا أعدنا الى الذاكرة مضمون الشق (ب) من التمهيد ٢ــ٧ــ٢ ، فاننا نجد رأسا النتيجة التالية :

٢ــ١٠ــ١ مبرهنة (الفضاء $B(X, Y)$)

ان الفضاء المتجهي $B(X, Y)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية والمحدودة من فضاء منظم X في فضاء منظم Y هو نفسه فضاء منظم ، حيث يعرف النظيم فيه بالمساواة

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \quad (1)$$

متى يغدو $B(X, Y)$ فضاء باناخ ؟ ان هذه مسألة مركزية في التحليل الدالي ، وترد الاجابة عنها في المبرهنة التالية . ومن الجدير ملاحظته في هذه المبرهنة أن شرط كون $B(X, Y)$ فضاء باناخ مستقل عن X ، أي أن X قد يكون تاما ، وقد لا يكون .

٢ــ١٠ــ٢ مبرهنة (التمام)

اذا كان Y فضاء باناخ ، فان $B(X, Y)$ يكون فضاء باناخ .

البرهان :

لتكن (T_n) متتالية اختيارية لكوشي في $B(X, Y)$ ، ولنثبت أن (T_n) تتقارب من مؤثر T في $B(X, Y)$. لما كانت (T_n) متتالية لكوشي ، فانه يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث يكون

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon \qquad (m, n > N).$$

وهكذا فاننا نجد أنه أيا كان x من X وأيا كان m, n اللذان يكبران N ، فان : [راجع (3) من البند ٢ــ٧] :

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leqq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|. \quad (2)$$

لنختر الآن لكل عنصر مثبت x وكـل $\tilde{\varepsilon}$ معطى عـددا ε مساويا لـ ε_x بحيث يكون $\tilde{\varepsilon} > \|x\| \varepsilon_x$. عندئذ نجد من (2) أن $\|T_n x - T_m x\| < \tilde{\varepsilon}$ ، ونرى أن $(T_n x)$ هي متتالية كوشي في Y . وبما أن Y تام ، فان $(T_n x)$ تتقارب ، ولنفترض مثلا أن $T_n x \longrightarrow y$. من الواضح أن النهاية y في Y تابعة للعنصر x الذي اخترناه في X . ونكون بهذا قد عرفنا مؤثرا $T: X \longrightarrow Y$ محددا بالمساواة $y = Tx$. هذا المؤثر خطي لان

$$\lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim (\alpha T_n x + \beta T_n z) = \alpha \lim T_n x + \beta \lim T_n z.$$

سنثبت أن T محدود وأن $T_n \longrightarrow T$ ، أي أن $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.

بما أن (2) صحيحة أيا كان m الذي يكبر N ، وأن $T_m x \longrightarrow Tx$ ، فمن الممكن جعل $m \longrightarrow \infty$. وباستخدام حقيقة كـون النظيم مستمرا ، فاننا نجـد عندئذ من (2) أنه أيا كان n الذي يكبر N وأيا كان x من X فان

$$\|T_n x - Tx\| = \|T_n x - \lim_{m \to \infty} T_m x\| = \lim_{m \to \infty} \|T_n x - T_m x\| \leqq \varepsilon \|x\|. \tag{3}$$

وهذا يبين أن $(T_n - T)$ عندما يكون $n > N$ ، هومؤثر خطي محدود . وبمـا أن T_n محدود ، فان $T = T_n - (T_n - T)$ محدود ، أي أن $T \in B(X, Y)$. وفضلا عن ذلك ، فاذا أخذنا في (3) الحد الاعلى عندما تمسح x كل العناصر التي نظيـم كل منها 1 ، فاننا نجد

$$\|T_n - T\| \leqq \varepsilon \qquad (n > N).$$

لذا فان $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. ∎

لهذه المبرهنة نتيجة هامة بالنسبة الى الفضاء الثنوي X' للفضاء X الـذي نعرفـه كمـا يلـي :

٢-١٠-٣ تعريف (الفضاء الثنوي X')

ليكن X فضاء منظما . عندئذ تشكل مجموعة الداليات الخطية المحدودة

على X فضاء منظما حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| \tag{4}$$

[راجع (2) من البند ٢ــ٨] يدعى هذا الفضاء **الفضاء الثنوي(*)** للفضاء X ويرمز له بـ X' ∎ •

لما كان الدالي الخطي على X تطبيقـا لـ X في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ (أي في الحقـل العددي لـ X) وكان $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ المزودان بالمترك المألوف تامين ، فاننا نستنتج أن X' هو $B(X, Y)$ حيث Y هو الفضاء التام $\mathbb{R}$ أو الفضاء التام $\mathbb{C}$ • لـذا فانه يمكن تطبيق المبرهنة ٢ــ١٠ــ٢ في هذه الحالة ، ونجد ما يلي :

٢ــ١٠ــ٤ مبرهنة (الفضاء الثنوي)

الفضاء الثنوي X' لفضـاء منظـم X هو فضـاء بانـاخ (سـواء أكـان X فضاء باناخ أم لم يكن كذلك) •

من المبادىء الاساسية في التحليل الدالي أن تقصّي الفضاءات يقترن غالبا بتقصي الفضاءات الثنوية • ولهذا نجد من المناسب أخذ بعض الفضاءات التـي نقابلها مرارا في التحليل الدالي والبحث عن شكل فضاءاتها الثنوية • وفي هذا المقام ، فان مفهوم الايزومورفيزم يعيننا في تفهم المناقشة الحالية • سنورد الآن التعريف التالي الذي يستند الى ما جاء في البند ٢ــ٨ •

إن **ايزومورفيزم** فضاء منظم X على فضاء منظم $\tilde{X}$ هو تطبيق متباين وغامر $T: X \longrightarrow \tilde{X}$ يحفظ النظيم ، بمعنى أنه اذا كان x أي عنصر من X فان

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

---

* يدعى هذا الفضاء أحيانا الفضاء المرافق لـ X • تذكر اننا عرفنا الفضاء الثنوي **الجبري** X^* لـ X في البند ٢ــ٨ بأنه الفضاء المتجهي المؤلف من جميع الداليات الخطيـة عـلى X •

(لذا فان T ايزومتري) • ونقول عندئذ عن X انه ايزومورفي مع $\tilde{X}$ ، ويسمى الفضاءان X و $\tilde{X}$ **فضاءين منظمين ايزمورفيين** • ومن وجهة نظر مجردة ، فاننا نعتبر الفضاءين الايزمورفيين X و $\tilde{X}$ متطابقين ، وكأن تأثير الايزومورفيزم لايعدو كونه اطلاق أسماء جديدة على العناصر (وذلك باضافة T الى كل منها) •

ان المثال الاول الذي سنسوقه الآن يبين أن الفضاء الثنوي لـ $\mathbf{R}^n$ ايزومورفي مع $\mathbf{R}^n$ ، وهذا يعني بايجاز أن الفضاء الثنوي لـ $\mathbf{R}^n$ هو $\mathbf{R}^n$ •

امثلـــة

٢ــ١٠ــ٥ الفضـــاء $\mathbf{R}^n$

الفضاء الثنوي لـ $\mathbf{R}^n$ هو $\mathbf{R}^n$ •

البرهـــان :

نلاحظ أولا استنادا الى المبرهنة ٢ــ٧ــ٨ أن $\mathbf{R}^{n\prime}=\mathbf{R}^{n*}$ ، وأنه يترتب على (5) من البند ٢ــ٩ أن لكل f من $\mathbf{R}^{n*}$ التمثيل

$$f(x)=\sum \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k=f(e_k)$$

(الجمع يتم من 1 الى n) • واعتمادا على متباينة كوشي ــ شفارتز (البنـــد ١ــ٢) فـــان

$$|f(x)|\leqq \sum |\xi_k \gamma_k| \leqq \left(\sum \xi_j^2\right)^{1/2}\left(\sum \gamma_k^2\right)^{1/2}=\|x\|\left(\sum \gamma_k^2\right)^{1/2}$$

وبأخذ الحد الاعلى عندما تمسح x جميع العناصر التي نظيمها 1 ، فاننا نجد أن

$$\|f\|\leqq \left(\sum \gamma_k^2\right)^{1/2}$$

ومن جهة أخرى ، فمن السهل التحقق أنه اذا أخذنا العنصر $x=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ نجد

المتباينة

$$\|f\| \geqq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2\right)^{1/2}$$

وبالتالي فان

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2\right)^{1/2}$$

ان هذا يثبت بأن نظيم f هو النظيم الاقليدي ، وأن $\|f\| = \|c\|$ ، حيث $c = (\gamma_k) \in \mathbf{R}^n$ لذا فان التطبيق من $\mathbf{R}^{n\prime}$ على $\mathbf{R}^n$ المحدد بالشكل $f \longmapsto c = (\gamma_k)$ ، حيث $\gamma_k = f(e_k)$ يحفظ النظيم • وبما أنه خطي ومتباين وغامر أيضا ، فانه ايزومورفيزم • ∎

٢ــ١٠ــ٦ الفضاء l^1

الفضاء الثنوي لـ l^1 هو l^∞ ·

البرهان :

ان قاعدة شاودر (البند ٢ــ٣) للفضاء l^1 هي (e_k) ، حيث $e_k = (\delta_{kj})$ ، عندئذ يوجد لكل x من l^1 التمثيل الوحيد التالي

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{5}$$

لنأخذ أي f من $l^{1\prime}$ ، حيث $l^{1\prime}$ هو الفضاء الثنوي لـ l^1 • بما أن f خطي ومحدود فان

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k) \tag{6}$$

حيث تتحدد الاعداد $\gamma_k = f(e_k)$ بصورة وحيدة بواسطة f • وبما أن $\|e_k\| = 1$ وأن

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leqq \|f\| \, \|e_k\| = \|f\|, \qquad \sup_k |\gamma_k| \leqq \|f\|. \tag{7}$$

أيضا ، فان $(\gamma_k) \in l^\infty$.

ومن جهة ثانية ، فمن الممكن أن نجد لكل $b = (\beta_k)$ من l^∞ داليا خطيا محدودا g على l^1 . وفي الحقيقة ، فانه يمكن تعريف g على l^1 بالدستور

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

حيث $x = (\xi_k) \in l^1$. من الواضح أن g خطي ، كما أن محدوديته تنتج من التالي

$$|g(x)| \leqq \sum |\xi_k \beta_k| \leqq \sup_j |\beta_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\beta_j|$$

(الجمع يتم من 1 الى ∞) . لذا فان $g \in l^{1\prime}$.

سنبين أخيرا أن نظيم f هو النظيم على الفضاء l^∞ . من (6) نرى أن

$$|f(x)| = \left|\sum \xi_k \gamma_k\right| \leqq \sup_j |\gamma_j| \sum |\xi_k| = \|x\| \sup_j |\gamma_j|.$$

واذا أخذنا الحد الاعلى عندما تمسح x كل العناصر التي نظيمها 1 ، نجد أن

$$\|f\| \leqq \sup_j |\gamma_j|.$$

ويترتب على هذه المتباينة ومن (7) المساواة

$$\|f\| = \sup_j |\gamma_j|, \tag{8}$$

التي ليست سوى النظيم على l^∞ . وبالتالي فمن الممكن كتابة هذه المساواة بالشكل $\|f\| = \|c\|_\infty$ ، حيث $c = (\gamma_j) \in l^\infty$ ، وهي تبين أن التطبيق الخطي المتباين والغامر لـ $l^{1\prime}$ على l^∞ والمعرف بالدستور $f \longmapsto c = (\gamma_j)$ هو ايزومورفيزم .■

٢-١٠-٧ الفضاء l^p

الفضاء الثنوي لـ l^p هو l^q ، حيث $1 < p < +\infty$ و q هو مرافق p ، أي أن $1/p + 1/q = 1$.

البرهـان :

ان (e_k) ، حيث $e_k = (\delta_{kj})$ كما في المثال السابق تصلح لان تكون قاعـدة شاودر للفضاء l^p • عندئذ يكون لكل x من l^p التمثيل الوحيد التالي

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{9}$$

لنأخذ أي f من $l^{p'}$ ، حيث $l^{p'}$ هو الفضاء الثنوي لـ l^p • بما أن f خطـي ومحدود فـان

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k). \tag{10}$$

ليكن q مرافق p (١ـ٢ـ٣) ، ولنأخذ $x_n = (\xi_k^{(n)})$ ، بفرض أن

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\gamma_k|^q/\gamma_k & \text{اذا كان } \gamma_k \neq 0 \text{ و } k \leqq n \\ 0 & \text{اذا كان } \gamma_k = 0 \text{ أو } k > n \end{cases} \tag{11}$$

فاذا عوضنا هذا في (10) نجد أن

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q.$$

كذلك ، فلدينا استنادا الى (11) والى أن $(q-1)p = q$ ، ما يلي :

$$\begin{aligned} f(x_n) \leqq \|f\|\,\|x_n\| &= \|f\| \left(\sum |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1/p} \end{aligned}$$

(يتم الجمع من 1 الى n) • وبالتالي فان

$$f(x_n) = \sum |\gamma_k|^q \leqq \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1/p}.$$

وبالتقسيم على العامل الاخير ، فاننا نجد اعتمادا على المساواة $1-1/p=1/q$ ، أن

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q\right)^{1-1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q\right)^{1/q} \leqq \|f\|.$$

ولما كان n كيفيا ، فاننا نجد بجعل $n \longrightarrow \infty$ أن

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^q\right)^{1/q} \leqq \|f\|. \tag{12}$$

اذن $(\gamma_k) \in l^q$ •

وبالعكس ، فمن الممكن أن نجد لكل $b=(\beta_k)$ من l^q داليـا خطيا محدودا مقابلا g على l^p • وفي الحقيقة ، فمن الممكن تعريف g على l^p بأن نضع

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

حيث $x=(\xi_k) \in l^p$ • عندئذ يكون g خطيا ، ومحدوديته تنتج عن متباينة هولدر (10) من البند ١ــ٢ • لذافان $g \in l^{p'}$ •

سنبين أخيرا أن نظيم f هو النظيم على الفضاء l^q • لدينا انطلاقا من (10) ومن متباينة هولدر ما يلي

$$|f(x)| = |\sum \xi_k \gamma_k| \leqq \left(\sum |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum |\gamma_k|^q\right)^{1/q}$$
$$= \|x\| \left(\sum |\gamma_k|^q\right)^{1/q}$$

(يتم الجمع من 1 الى ∞) • لذا فاذا أخذنا الحد الاعلى عندما يمسح جميع العناصر التي نظيمها 1 ، نجد أن

$$\|f\| \leqq \left(\sum |\gamma_k|^q\right)^{1/q}$$

نستنتج من هذا ومن (12) المساواة

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^q\right)^{1/q} \tag{13}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل $\|f\|=\|c\|_q$ ، حيث $c=(\gamma_k)\in l^q$ ، و $\gamma_k=f(e_k)$ • ان التطبيق لـ $l^{p'}$ على l^q المعرف بالدستور $c \longmapsto f$ خطي ومتباين وغامر • وباضافة (13) الى هذا نستنتج أنه يحفظ النظيم ، وبالتالي فهو ايزومورفيزم • ∎

ما هي أهمية هذه الامثلة والامثلة المشابهة لهـا ؟ مـن الاهمية بمكان في البحوث التطبيقية معرفة الشكل العام للداليات الخطية والمحدودة على فضاءات متداولة من الوجهة العملية ، ولقد تم فعلا دراسة العديد من الفضاءات بهـذا الشكل • ان أمثلتنا تقدم التمثيلات العامة للداليات الخطية والمحدودة على $\mathbb{R}^n$ و l^1 و l^p ، حيث $p>1$ • أما الفضاء $C[a, b]$ ، فسنتناوله بالبحث فيما بعد (البند ٤ـ٤) ، وذلك بعد التعرف على أدوات اضافيـة لازمة لدراسة هـذا الفضاء (وأهمها ما يسمى بمبرهنة هان ـ باناخ) •

كذلك ، فاذا أعدنا الى الذاكرة ما سبق وتمت مناقشته بصدد الفضاء الثنوي الجبري X^{**} في البند ٢ـ٨ ، فمن الممكن التساؤل عما اذا كان يجدر بنا دراسة الفضاء الثنوي الثاني $X''=(X')'$ للفضاء X • ومع أن الاجابة عن هذا التساؤل تتـم بالايجاب ، فاننا سنرجيء هذه الدراسة الى البند ٤ـ٦ ، حيث نطـور أساليب ملائمة للحصول على نتائج أساسية في ذلك الاتجاه • أما في الفصل القـادم ، فسنتوجه الى أمور أبسط الى حد مـا ، ونعني بهـا فضاءات الجذاء الداخلي وفضاءات هلبرت • وسنرى أن هذه فضاءات منظمـة خاصة تحظـى بأهميـة تطبيقيـة هائلـة •

مسـائل

١ ـ ما هو العنصر الصفري في الفضاء المتجهي $B(X, Y)$ ؟ وما هو عكس عنصر T من $B(X, Y)$ بالمعنى الوارد في التعريف ٢ـ١ـ١ ؟

٢ ـ لقد عرفنا المؤثرات والداليات التي درسناها حتـى الآن علـى الفضاء X بكامله • أثبت أنه حتى لو استغنينا عن هذا الفرض ، فاننا نجد في حالة

الداليات المبرهنة التالية : « اذا كـان f و g داليـين خطيين محدوديـن ساحتاهما في فضاء منظم X ، فانه اذا افترضنا α و β عددين غير صفريين، فان التركيب الخطي $h=\alpha f+\beta g$ يكـون داليـا خطيـا محدودا ساحتـه $\mathfrak{D}(h)=\mathfrak{D}(f)\cap\mathfrak{D}(g)$ » •

٣ ــ عمـم المبرهنة الواردة في المسألة السابقة على المؤثرين الخطيين المحدودين T_1 و T_2 •

٤ ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين ، ولتكن $T_n: X \longrightarrow Y$ $(n=1, 2, \cdots)$ مؤثرات خطية محدودة • بين أن التقارب $T_n \longrightarrow T$ يقتضي أن يوجد عـدد صحيح موجب N لكل عدد موجب ε ، بحيث أنه اذا كان n أي عدد طبيعي يحقق المتباينة $n>N$ ، واذا كان x أي عنصر منتم الى كرة مغلقة معطاة ، فاننـا نجد المتباينة $\|T_nx-Tx\|<\varepsilon$ •

٥ ــ بين أن ٢ــ٨ــ٥ ينسجم مع ٢ــ١٠ــ٥ •

٦ ــ اذا كان X فضاء المرتبات n من الاعداد الحقيقية ، وكان $\|x\|=\max_i|\xi_i|$ ، حيث $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ، فما هو النظيم المقابل للفضاء الثنوي X' ؟

٧ ــ ما هي النتيجة التي يمكن الحصول عليها من ٢ــ١٠ــ٦ في حالة الفضـاء X المؤلف من كل المرتبات n من الاعداد الحقيقية ؟

٨ ــ أثبت أن الفضاء الثنوي للفضاء c_0 هو l^1 (راجع المسألة ١ مـن البنـد ٢ــ٣) •

٩ ــ بين أن الدالي الخطي f على فضاء متجهي X يتحدد بصورة وحيدة لدى معرفة قيمه على قاعدة لهامل للفضاء X • (راجع البند ٢ــ١) •

١٠ــ ليكن X و $Y\neq\{0\}$ فضاءين منظمين ، حيث $\dim X=\infty$ • أثبت أنه يوجد مؤثر خطي غير محدود واحد على الاقل $T: X \longrightarrow Y$ • (استخدم قاعـدة هامـل) •

١١ــ اذا كان X فضاء منظما وكان $\dim X=\infty$ ، فبين أن الفضاء الثنوي X' لا يتطابق مع الفضاء الثنوي الجبري X^* •

١٢ـ (التمـام) . يمكن استخدام الامثلـة الواردة في البند السابق لاثبات تمام فضاءات معينة . كيف يتم هذا الامر ؟ وما هي هذه الفضاءات ؟

١٣ـ (العـادم) . لتكن M أي مجموعة جزئية غير خالية في فضاء منظم X . يعرف العادم M^a لـ M بأنه مجموعة كل الداليات الخطية المحدودة على X المساوية للصفر في كل نقطة من M . وهـكذا فان M^a مجموعة جزئية مـن الفضاء الثنوي X' للفضاء X . بين أن M^a فضاء متجهي جزئي من X' ، وأن هذا الفضاء الجزئي مغلق . حدد X^a و $\{0\}^a$.

١٤ـ اذا كان M فضاء جزئيا بعده m من فضاء منظم X بعده n ، فبين أن M^a هو فضاء جزئي من X' بعده $(n-m)$. صغ هذا على شكل مبرهنة حول حلول جملة معادلات خطية .

١٥ـ لتكن $M=\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}\subset\mathbb{R}^3$. أوجد قاعدة لـ M^a .

* * *

الفصل الثالث

فضاءات الجداء الداخلي . فضاءات هلبرت

من الممكن في كل فضاء منظم أن نجمع المتجهات وأن نضرب المتجهات بأعداد ، تماما كما نفعل في جبر المتجهات . وفضلا عن ذلك ، فان النظيم على الفضاء المنظم يعمم مفهوم طول المتجه . بيد أن الذي ما يزال ناقصا في الفضاء المنظم العام ، والذي نود ادراجه في هذا الفضاء إن أمكن ، هو شبيه للجداء الداخلي الذي عرفناه في جبر المتجهات في الفضاء $\mathbf{R}^3$ بالمساواة

$$a \cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

والذي أسفرعن عدة نتائج منها أن

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

وأن شرط تعامد متجهين هو

$$a \cdot b = 0$$

وقد وجدنا أن هذا التعريف وما ينتج عنه هي أدوات ذات فعالية كبيرة في العديد من التطبيقات . لذا فانه يرد السؤال عما اذا كان من الممكن تعميم الجداء الداخلي والتعامد على الفضاءات المتجهية العامة . وفي الحقيقة ، فقد وجد أن هذا أمر يمكن تنفيذه ، إذ تم التوصل الى ما يسمى **بفضاءات الجداء الداخلي** ، التي يطلق عليها حين تكون تامة اسم **فضاءات هلبرت** .

ان فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظمة خاصة ، كما سنرى بعد قليل ، وهي في التسلسل التاريخي أقدم من الفضاءات المنظمة العامة ، كما أن نظرية هذه الفضاءات أغنى ، وتمتلك كثيرا من ملامح الفضاءات الاقليدية ، التي يشغل مفهوم التعامد فيها مركزا متميزا • وفي الحقيقة ، فان فضاءات الجداء الداخلي قد تكون أكثر التعميمات الطبيعية للفضاء الاقليدي ، وعلى القارىء أن يلاحظ التناسق الكبير والجمال الذي تتمتع به المفاهيم والبراهين في هذا المجال • وقد استوحيت النظرية بكاملها من بحوث د• هلبرت (١٩١٢ م•) في المعادلات التكاملية • أما الرموز والمصطلحات الهندسية المستعملة حاليا ، فهي مشابهة لتلك الواردة في الهندسة الاقليدية ، وقد اعتمدها شميت عام ١٩٠٨ م• بناء على اقتراح كافاليفسكي (كما ذكر شميت في الصفحة ٥٦ من بحثه) • وقد تبين أن هذه الفضاءات أكثر الفضاءات أهمية في التطبيقات العملية للتحليل الدالي حتى وقتنا هذا •

مفاهيم هامة • توجيه موجز حول المحتوى الرئيسي

فضاء الجداء الداخلي X (٣ــ١ــ١) هو فضاء متجهي مزود **بجداء داخلي** $\langle x, y\rangle$ معرف عليه • والجداء الداخلي تعميم للجداء الداخلي لمتجهين في الفضاء ثلاثي البعد ، وهو يستعمل لتعريف ما يلي :

(I) النظيم $\|\cdot\|$ بالمساواة $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ •

(II) التعامد بالمساواة $\langle x, y\rangle = 0$ •

وفضاء هلبرت هو فضاء جداء داخلي تام • ونظرية فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت أغنى من نظرية الفضاءات المنظمة العامة وفضاءات باناخ • ومن السمات المميزة لهذه الفضاءات ما يلي :

(i) تمثيلات الفضاء H بمجموع مباشر لفضاء جزئي مغلق **ومتممه المتعامد** (٣ــ٣ــ٤) •

(ii) **المجموعات والمتتاليات المتعامدة** والتمثيلات الموافقة لعناصر من H • (راجع البندين ٣ــ٤ و ٣ــ٥) •

(iii) **تمثيل ريس ٣ــ٨ــ١ للداليات الخطية المحدودة بجداءات داخلية ٠**

(iv) **مؤثر هلبرت المرافق** T^* **لمؤثر خطي محدود** T (٣ــ٩ــ١) ٠

وتكون المجموعات والمتاليات المتعامدة هامة فعلا فقط عندما تكون كلية (٣ــ٦) ٠ ومن الممكن استعمال مؤثرات هلبرت المرافقة في تعريف صفوف من المؤثرات (المترافقة ذاتيا ، الواحدية ، الناظمية ، كما في البند ٣ــ١٠) والتي تنطوي على أهمية بالغة في التطبيقات ٠

٣ــ١ فضاءات الجداء الداخلي ٠ فضاءات هلبرت

ان الفضاءات التي نتناولها في هذا الفصل تعرف على النحو التالي ٠

٣ــ١ــ١ تعريف (فضاء الجداء الداخلي ، فضاء هلبرت)

فضاء الجداء الداخلي هو فضاء متجهي X مزود بجداء داخلي معرف على X ٠ أما **فضاء هلبرت** فهو فضاء جداء داخلي تام (بالنسبة للمترك المحدد بالجداء الداخلي ، كما في (2)) ٠ **الجداء الداخلي** على X هنا هو تطبيق لـ $X \times X$ في الحقل العددي K لـ X ، بمعنى أنه يقابل كل زوج x و y من المتجهات عدد نشير اليه بالشكل

$$\langle x, y \rangle$$

ويسمى **الجداء الداخلي**(*) لـ x و y ، بحيث تتحقق الشروط التالية أيا كانت المتجهات x و y و z وأيا كان العدد α :

---

* يسمى الجداء الداخلي أحيانا **الجداء العددي** ، الا أنه يجب عدم الخلط بينه وبين جداء متجه بعدد في الفضاء المتجهي ٠ هذا وان الرمز $\langle , \rangle$ للجداء الداخلي شائع تماما ٠ وفي الكتب الابتدائية ، ككتابنا هذا ، فان لهذا الرمز ميزة على الرمز $(,)$ المستعمل كثيرا ، ذلك انه يستبعد الخلط بينه وبين الزوج المرتب (الذي قد يدل على مركبتي متجه ، أو عنصرين من فضاء جداء ، أو مضمون دالة لمتغيرين ، أو غير ذلك) ٠

(جد ١) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(جد ٢) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

(جد ٣) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

$\langle x, x\rangle \geqq 0$

(جد ٤) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$

ويحدد الجداء الداخلي على X **نظيما** على X بالمساواة

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (\geqq 0) \tag{1}$$

كما يحدد متركا على X كما يلي :

$$d(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}. \tag{2}$$

لذا فان فضاءات الجداء الداخلي هي فضاءات منظمة ، كما ان فضاءات هلبرت هي فضاءات باناخ .

وتعني الاشارة ــ الواردة في (جد ٣) المرافق العقدي . وبالتالي ، فاذا كان X فضاء متجهيا حقيقيا ، فاننا نجد ببساطة أن

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \text{(التناظر)}$$

إن الاثبات بأن (1) يحقق موضوعات النظيم (ن١) ــ (ن٤) الواردة في ٢ــ٢ ، يرد في بداية البند التالي .

ويترتب على الشروط من (جد ١) وحتى (جد٣) الدساتير

(a) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

(3) (b) $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$

(c) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle$

التي سنستعملها كثيرا . يبين (3a) أن الجداء الداخلي خطي في عامله الايسر . وبما أنه يرد في (3c) المرافقان العقديان $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$ في اليمين ، فاننا نقول بأن

الجداء الداخلي **خطي مرافق** في عامله الايمن • واذا رغبنا في التعبير عن كــلا الخاصتين معا ، فاننا نقول بأن الجداء الداخلي « خطي مرة ونصف المرة » • وما يهيب بنا الى استحداث هذا المصطلح هو أن « الخطي المرافق » يعرف أيضا بأنه « نصف خطي » • ولما كان مصطلح « نصف الخطية » هذا ضعيف الدلالة ، فاننا لــن نستعمله •

ويمكن للقارىء أن يبين باجراء حسابات مباشرة وبسيطة أن النظيم عــلى فضاء جداء داخلي يحقق **مساواة متوازي الاضلاع** الهامة التالية

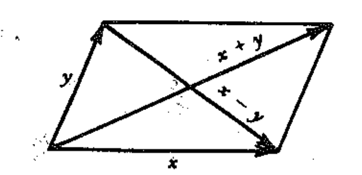
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{4}$$

وهذا المصطلح مستوحى من الهندسة الابتدائية ، كما نرى في الشكل ٢٣ ، وذلك اذا أعدنا الى الذاكرة بأن النظيم يعمم المفهوم الابتدائي لطول متجه (البند ٢ــ٢)• وانه لأمر جد هام أن نلاحظ بأن المعادلة (4) تظل سارية في الفضاءات التــي ندرسها حاليا ، والتي هــي أعــم بكثير مــن الفضاءات المستعملة في الهندسة الابتدائيــة •

وفي الختام ، فانه اذا لم يحقق نظيم المساواة (4) ، فلا يمكن الحصول على هذا النظيم من جداء داخلي باستعمال (1) • وفي الحقيقة ، فان مثل هذه النظائم موجود فعلا ، وسنورد أمثلة عليها بعد قليل • وهكذا فانه يمكننا أن نقول دون أن يكون ثمة مجال للالتباس ما يلي :

ليس كل فضاء منظم فضاء جداء داخلي بالضرورة •

وقبل البدء بايراد الامثلة ، فاننــا سنحدد مفهوم التعامد ، الــذي يشكل مفهوما رئيسيا في النظرية كلها • من المعلوم أنه اذا كان الجداء العددي لمتجهين في فضاء ثلاثي البعد صفرا ، فــان المتجهين متعامدان ، أي أن الزاوية بينهمــا تساوي $\frac{\pi}{2}$ ، أو أن أحدهما على الاقل هو المتجه الصفري • ان هــذا يوحي باقتراح التعريف التالي :



الشكل (٢٣) ، متوازي اضلاع في المستوي ضلعاه x و y

٣ـ١ـ٢ تعريف (التعامد)

يقال عن عنصر x في فضاء جداء داخلي X انه **متعامـد** مع العنصر y مـن X اذا كان

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

ونقـول أيضـا **ان العنصرين x و y متعامدان** ، ونكتـب $x \perp y$ ، وبصورة مماثلة ، فاذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من X ، فاننا نقول إن x يتعامد مع A ، ونكتب $x \perp A$ ، اذا كان $x \perp a$ أيا كان a من A ، كما نقول بأن A و B متعامدتان ، ونكتب $A \perp B$ ، اذا كان $a \perp b$ أيا كان a من A و b من B ، ∎

أمثلـة

٣ـ١ـ٣ الفضاء الاقليدي R^n

الفضاء R^n هو فضاء هلبرت ، حيث الجداء الداخلي معرف بالدستور

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n \qquad (5)$$

وحيث

$$y = (\eta_j) = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \quad \text{و} \quad x = (\xi_j) = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$$

وفي الحقيقة ، فانه يترتب على (5) أن

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}$$

ونحصل من هذا على المترك الاقليدي المعرف كما يلي :

$$d(x, y)=\|x-y\|=\langle x-y, x-y\rangle^{1/2}=[(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2]^{1/2};$$

(راجع ٢ــ٢ــ٢) ٥ هذا وقد أثبتنا التمام في ١ــ٥ــ١ ٥

واذا كان $n=3$ ، فان الدستور (5) يعطي الجداء العددي المألوف

$$\langle x, y\rangle=x\cdot y=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3$$

للمتجهين $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ، كما أن التعامد

$$\langle x, y\rangle=x\cdot y=0$$

ينسجم مع المفهوم الابتدائي لتعامد متجهين ٥

٣ــ١ــ٤ الفضاء الوحدي C^n

ان الفضاء C^n المعرف في ٢ــ٢ــ٢ هو فضـاء هلبرت المـزود بالجـداء الداخلي المعرف بالدستور

$$\langle x, y\rangle=\xi_1\bar{\eta}_1+\cdots+\xi_n\bar{\eta}_n. \qquad (6)$$

وفي الحقيقة ، فاننا نستنتج من (6) أن النظيم هو

$$\|x\|=(\xi_1\bar{\xi}_1+\cdots+\xi_n\bar{\xi}_n)^{1/2}=(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)^{1/2}.$$

ونرى هنا أيضا سبب وجوب أخذ المرافق العقـدي $\bar{\eta}_i$ في (6) ، اذ أنه يترتب على هذا أن $\langle y, x\rangle=\overline{\langle x, y\rangle}$ ، وهو الشرط (جد ٣) ، وبالتالي فان $\langle x, x\rangle$ عـدد حقيقـي ٥

٣ــ١ــ٥ الفضـاء $L^2[a, b]$

ان النظيم في المثال ٢ــ٢ــ٧ يعرف بالمساواة

$$\|x\|=\left(\int_a^b x(t)^2\, dt\right)^{1/2}$$

ويمكن الحصول عليه من الجداء الداخلي المحدد بالمساواة

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\,dt. \tag{7}$$

لقد افترضنا في المثال ٢ــ٢ــ٧ أن الدوال حقيقية ، وذلك بقصد التبسيط . هذا وفيما يخص بعض التطبيقات العملية ، فانه من المفيد التحرر من هذا القيد باعتبار الدوال عقدية (وبافتراض أن t المنتمي الى $[a, b]$ حقيقي كما في السابق) . وتشكل هذه الدوال فضاء متجهيا عقديا ، يغدو فضاء جداء داخلي حيث

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt. \tag{7*}$$

ويعني الرمز ــــ هنا المرافق العقدي ، الذي يجعل الخاصة (جد ٣) محققة ، بحيث يكون $\langle x, x\rangle$ عددا حقيقيا . ونحتاج الى هذه الخاصة ثانية فيما يتعلق بالنظيم ، الذي يمكن أن نعرفه الآن بالمساواة

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

وذلك لان $x(t)\overline{x(t)} = |x(t)|^2$.

ان اتمام الفضاء المتري الموافق للمساواة (7) هو الفضاء الحقيقي $L^2[a, b]$ (راجع ٢ــ٢ــ٧) . كذلك ، فان اتمام الفضاء المتري الموافق للمساواة (7*) يدعى **الفضاء العقدي** $L^2[a, b]$. وسنرى في البند القادم بأنه يمكن تمديد الجداء الداخلي من فضاء داخلي الى تمامه . فاذا أضفنا هذا الى ما ناقشناه الآن ، فاننا نستنتج أن $L^2[a, b]$ هو فضاء هلبرت .

٣ــ١ــ٦ فضاء متتاليات هلبرت l^2

ان الفضاء l^2 (٢ــ٢ــ٣) هو فضاء هلبرت المزود بالجداء الداخلي

$$\langle x, y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j. \tag{8}$$

وتقارب هذه المتسلسلة ناتج من متباينة كوشي ـ شفارتز (11) من البند ١ـ٢ ، ومن كون x و y عنصرين من l^2 فرضا • نرى هنا بأن (8) تعميم لـ (6) ، والنظيم محدد بالمساواة

$$\|x\|=\langle x, x\rangle^{1/2}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2\right)^{1/2}$$

أما التمام فقد سبق وأثبتناه في ١ـ٥ـ٤ •

ان l^2 هو عينة نموذجية لفضاءات هلبرت ، وقد قدمه ودرسه هلبرت عام ١٩١٢ لدى بحثه في المعادلات التكاملية • هذا ولم يعط تعريف فضاء هلبرت العام استنادا الى الموضوعات التي تحدده الا بعد فترة طويلة ، وذلك عندما أورده فون نويمان عام ١٩٢٧ في بحث له حول الاسس الرياضية لميكانيكا الكم • كذلك فقد تطرق لهذا التعريف ستون عام ١٩٣٢ • ومن الجدير بالذكر أن هذا التعريف قد تضمن قابلية الفصل ، الا أن هذا الشرط أسقط فيما بعد ، وذلك عندما بين كل من لوفيك وريش وريس عام ١٩٣٤ أنه في أغلب جوانب النظرية ، فان هذا الشرط قيد غير لازم •

٣ـ١ـ٧ الفضاء l^p

ان الفضاء l^p ، عندما يكون $p \neq 2$ ، ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فان l^p ليس فضاء هلبرت •

البرهان :

ان هذه الدعوى تعني أن النظيم على l^p ، عندما يكون $p \neq 2$ ، لا يمكن أن يشتق من جداء داخلي • سنبرهن على هذا الامر باثبات أن النظيم لا يحقق

مساواة متوازي الأضلاع (4) • وفي الحقيقة ، اذا كان $x=(1,1,0,0,\cdots)\in l^p$ و $y=(1,-1,0,0,\cdots)\in l^p$ فـان

$$\|x\|=\|y\|=2^{1/p}, \qquad \|x+y\|=\|x-y\|=2.$$

الامر الذي يبين بأن (4) ليست محققة في الحالة $p\neq 2$ •

لما كان l^p تاما (١ــ٥ــ٤) ، فان l^p ، حيث $p\neq 2$ ، هو **فضا ءباناخ دون ان يكون فضاء هلبرت** • ويصح الامر نفسه في المثال القادم •

٣ــ١ــ٨ الفضــاء $C[a,b]$

ان الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فانه ليس فضــاء هلبــرت •

البرهــان :

سنبين بأن النظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)| \qquad J=[a,b]$$

لا يمكن اشتقاقه من جداء داخلي لكونه لايحقق مساواة متوازي الاضلاع (4) • وفي الحقيقة ، فاذا أخذنا $x(t)=1$ و $y(t)=(t-a)/(b-a)$ ، فاننا نجد أن $\|x\|=1$ و $\|y\|=1$ ، وأن

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}.$$

لذا نجد أن $\|x+y\|=2$ و $\|x-y\|=1$ ، وأن

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5 \quad \text{في حين أن} \quad 2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$$

وبهذا يكتمل البرهان • ∎

سنورد في انختام الحقيقة الهامة التالية • نحن نعلم بأنه يقابل الجداء الداخلي نظيم محدد بالمساواة (1) • وبالعكس فانه لأمر عظيم الشأن أن نعلم بأنه يمكن « اعادة اكتشاف » الجداء الداخلي من النظيم الموافق له • وفي الحقيقة ، فيمكن للقارىء التحقق بالحساب المباشر أنه اذا كان الفضاء فضاء جداء داخلي حقيقي ، فان

$$\langle x, y\rangle=\tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \tag{9}$$

وأنه اذا كان فضاء جداء داخلي عقدي ، فان

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle x, y\rangle&=\tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)\\ \operatorname{Im}\langle x, y\rangle&=\tfrac{1}{4}(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2).\end{aligned} \tag{10}$$

ويطلق أحيانا على الدستور (10) اسم **متطابقة الاستقطاب** •

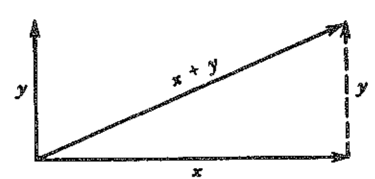
مسائل

١ ـ أثبت صحة (4) •

٢ ـ **(مبرهنة فيثاغورس)** • اذا كان $x \perp y$ في فضاء جداء داخلي X ، فبين أن

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

(الشكل ٢٤) • عمم هذا الدستور على m من المتجهات المتعامدة مثنى •



الشكل (٢٤) • ايضاح مبرهنة فيثاغورس في المستوي

٣ ــ اذا كان X في المسألة ٢ حقيقيا ، فبين صحة العكس ، أي أن العلاقة الواردة في المسألة المذكورة تقتضي أن يكون $x \perp y$ • أثبت أن هذا قد لا يصح عند كون X عقديا ، وأورد أمثلة على ذلك •

٤ ــ اذا كان فضاء جداء داخلي X حقيقيا ، فبين أن الشرط $\|x\|=\|y\|$ يقتضي أن يكون $\langle x+y, x-y\rangle = 0$ • ما هو المعنى الهندسي لهذا اذا كان $X=\mathbb{R}^2$ ؟ وما الذي يقتضيه هذا الشرط اذا كان X عقديا ؟

٥ ــ (**متطابقة ابولونيوس**) • تحقق بالحساب المباشر أنه أيا كانت العناصر x و y و z في فضاء جداء داخلي فان

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\tfrac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\tfrac{1}{2}(x+y)\right\|^2.$$

بين أنه يمكن كذلك الحصول على هذه المتطابقة انطلاقا من مساواة متوازي الاضلاع •

٦ ــ ليكن $x \neq 0$ و $y \neq 0$ • (آ) بين أنه اذا كان $x \perp y$ ، فان $\{x, y\}$ مجموعة مستقلة خطيا • (ب) عمم هذه النتيجة على المتجهات غير الصفرية والمتعامدة مثنى $x_1, \cdots, x_m$ •

٧ ــ اذا كان $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ أيا كان x في فضاء جداء داخلي ، فبين أن $u=v$ •

٨ ــ برهن على صحة (9) •

٩ ــ برهن على صحة (10) •

١٠ــ ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين • بين بأن المساواة $\langle z_1, z_2\rangle = z_1\bar{z}_2$ تعرف جداء

داخليا ، وهذا الجداء يولد المترك المألوف على المستوي العقدي • ما هو الشرط الذي يجب أن يتوفر كي يتم التعامد ؟

١١ــ ليكن X الفضاء المتجهي المؤلف من كل الازواج المرتبة من الاعداد العقدية• هل يمكن الحصول على النظيم المعرف على X بالمساواة

$$\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2| \qquad [x = (\xi_1, \xi_2)]$$

انطلاقا من جداء داخلي ؟

١٢ــ عين $\|x\|$ في ٣ــ١ــ٦ اذا كان $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ ، حيث (آ) $\xi_n = 2^{-n/2}$ (ب) $\xi_n = 1/n$ ؟

١٣ــ تحقق بأنه في حالة الدوال المستمرة ، فان الجداء الداخلي الوارد في ٣ــ١ــ٥ يحقق الشروط (جد ١) ــ (جد ٤) •

١٤ــ بين أن النظيم على $C[a, b]$ لا متغير عند القيام بالتحويل الخطي $t = \alpha\tau + \beta$ • أفد من هذا في اثبات صحة الدعوى الواردة في ٣ــ١ــ٨ ، وذلك بتطبيق ينقل $[a, b]$ الى $[0, 1]$ ، ومن ثم بأخذ الدالتين المعرفتين كما يلي : $\tilde{x}(\tau) = 1$ و $\tilde{y}(\tau) = \tau$ حيث $\tau \in [0, 1]$ •

١٥ــ اذا كان X فضاء متجهيا منتهي البعد ، وكانت (e_j) قاعدة لـ X ، فبين أنه يمكن تعيين جداء داخلي على X تماما بقيمه $\gamma_{jk} = \langle e_j, e_k \rangle$ • هل يمكن اختيار الاعداد γ_{jk} هذه بصورة كيفية تماما ؟

٣ــ٢ خواص اخرى لفضاءات الجداء الداخلي

سنتحقق باديء ذي بدء من أن (١) من البند السابق تعرف نظيما :

إن (ن١) و (ن٢) في البند ٢ــ٢ نتيجتان من (جد ٤) • كذلك ، فاننا نحصل على (ن٣) بالافادة من (جد ٢) و (جد ٣) ، ذلك أن

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2.$$

وأخيرا فان (ن٤) ترد في ثنايا التمهيدية التالية •

٣-٢-١ تمهيدية (متباينة شفارتز ، متباينة المثلث) .

ان الجداء الداخلي والنظيم الناتج عنه يحققان متباينة شفارتز ومتباينة المثلث كما يلي :

(آ) لدينا

(متباينة شفارتز) $$|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\,\|y\| \qquad (1)$$

علما بأن الشرط اللازم والكافي كي ترد اشارة التساوي في (1) هو أن تكون $\{x, y\}$ مجموعة مرتبطة خطيا .

(ب) ان هذا النظيم يحقق ايضا المتباينة

(متباينة المثلث) $$\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\| \qquad (2)$$

علما بأن الشرط اللازم والكافي(*) كي ترد اشارة التساوي هو ان يكون $y = 0$ أو $x = cy$ (c عدد حقيقي كما أن $c \geqq 0$) .

البرهان :

(آ) اذا كان $y = 0$ ، فان صحة (1) نابعة من أن $\langle x, 0\rangle = 0$. لنفترض أن $y \neq 0$. عندئذ نجد أنه أيا كان العدد α ، فان

$$0 \leqq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle - \bar{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \bar{\alpha}\langle y, y\rangle].$$

نلاحظ أن العبارة الواردة بين القوسين $[\cdots]$ تساوي الصفر اذا اخترنا $\bar{\alpha} = \langle y, x\rangle / \langle y, y\rangle$. وما يتبقى من المتباينة هو

$$0 \leqq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2};$$

---

* لاحظ بأن شرط التساوي هذا « متناظر » تماما بالنسبة لـ x و y ، ذلك أن المساواة $x = 0$ محتواة في المساواة $x = cy$ (عندما $c = 0$) ، وكذلك فان المساواة $y = kx$ محتواة في المساواة $x = cy$ (عندما يكون $k = 1/c$ و $c > 0$) .

حيث أفدنا من المساواة $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ • فاذا ضربنا بـ $\|y\|^2$ ، ونقلنا الحد الاخير الى الطرف الايسر ، ومن ثم جذرنا ، فاننا نجد (1) •

ان الشرط اللازم والكافي كي ترد المساواة هنا هو أن يكون $y = 0$ أو أن يكون $\|x - \alpha y\|^2 = 0$ ، وواضح أن المساواة الاخيرة تكافيء $x - \alpha y = 0$ أو $x = \alpha y$ ، الامر الذي يثبت الارتباط الخطي •

(ب) سنثبت الآن صحة (2) •لدينا

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2.$$

واستنادا الى متباينة شفارتز فان

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle y, x\rangle| \leqq \|x\| \|y\|.$$

نجد اعتمادا على متباينة المثلث بالنسبة للاعداد أن

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &\leqq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y\rangle| + \|y\|^2\\ &\leqq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ، نجد (2) •

ان الشرط اللازم والكافي كي ترد اشارة التساوي هنا هو أن يكون

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 2 \|x\| \|y\|.$$

من الواضح أن الطرف الايسر هو $2 \operatorname{Re} \langle x, y\rangle$ ، حيث يعني الرمز Re القسم الحقيقي (والذي يشكل الحرفين الاولين من الكلمة الانجليزية real ، التي تعني بالعربية كلمة «حقيقي») • نستنتج من هذا ومن (1) أن

$$\operatorname{Re} \langle x, y\rangle = \|x\| \|y\| \geqq |\langle x, y\rangle|. \qquad (3)$$

ولما كان القسم الحقيقي من عدد عقدي لا يمكن أن يكبر قيمتَهُ المطلقة ، فمن الضروري أن نجد مساواة تقتضي الارتباط الخطي اعتمادا علـى (آ) ، ولنفترض مثلا أن $y=0$ أو $x=cy$ • سنبين أن c حقيقي وأنه أكبر من الصفر أو يساويه. نجد من (3) حيث نضع اشارة التساوي أن $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle=|\langle x, y\rangle|$ • بيد أنـه اذا كان القسم الحقيقي من عدد عقدي مساويا لقيمته المطلقة ، فلابد أن يكون القسم التخيلي صفرا • لذا فان $\langle x, y\rangle=\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \geqq 0$ وفق (3) ، كمـا أن $c \geqq 0$ ، وهذا ناتج من أن

$$0 \leqq\langle x, y\rangle=\langle c y, y\rangle=c\|y\|^{2} . \qquad \blacksquare$$

ان متباينة شفارتز (1) بالغة الاهمية ، وسنستعملها في البراهين اللاحقـة مرارا وتكرارا • كذلك ، فثمة خاصة كثيرة الاستعمال ، ألا وهي استمرار الجداء الداخلي الامر الذي نورده في التمهيدية التالية :

٣-٢-٢ تمهيدية (استمرار الجداء الداخلي)

اذا كان $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ في فضاء جداء داخلي ، فان $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow\langle x, y\rangle$

البرهـان :

اذا طرحنا وجمعنا الحد $\langle x_n, y\rangle$ ، واستعملنا متباينة المثلث المتعلقة بالاعداد، واذا استخدمنا أخيرا متباينة شفارتز ، فاننا نجد أن

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle-\langle x, y\rangle| & =|\langle x_n, y_n\rangle-\langle x_n, y\rangle+\langle x_n, y\rangle-\langle x, y\rangle| \\
& \leqq|\langle x_n, y_n-y\rangle|+|\langle x_n-x, y\rangle| \\
& \leqq\|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

وذلك لان $y_n-y \longrightarrow 0$ وكان $x_n-x \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$ • $\blacksquare$

وكتطبيق أول لهذه التمهيدية ، فسنثبت أنه يمكن اتمـام كل فضاء جـداء داخلي • ان هـذا الاتمـام هـو فضـاء هلبرت ، وهـو وحيـد اذا استثنينا

الايزومورفيزمات • وتعريف الايزومورفيزم في هذا السياق يتم على النحو التالي (كما سبق واقترحنا أثناء المناقشة الواردة في البند ٢ــ٨) :

إن **الايزومورفيزم** T لفضاء جداء داخلي X على فضاء داخلي $\tilde{X}$ على الحقل نفسه هو مؤثر خطي متباين وغامر $T: X \longrightarrow \tilde{X}$ يحفظ الجداء الداخلي ، بمعنى أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فان

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

حيث رمزنا للجداءين الداخليين على X و $\tilde{X}$ بالرمز نفسه بقصد التبسيط • عندئذ يقال عن $\tilde{X}$ انه **ايزومورفي** مع X ، كما يقال عن X و $\tilde{X}$ انهما **فضاءا جداء داخلي ايزومورفيان** • لاحظ أن شروط التباين والغمر والخطية تضمن كون T ايزومورفيزم فضاء متجهي لـ X على $\tilde{X}$ ، بحيث أن T يحفظ البنية الكلية لفضاء الجداء الداخلي • ان T هو أيضا تطبيق ايزومتري (متساوي المسافة) لـ X على $\tilde{X}$ لان المسافات في X و $\tilde{X}$ تتحدد بالنظيمين المعرفين بالجداءين الداخليين على X و $\tilde{X}$ •

لهذا ، فان مبرهنة الاتمام لفضاء جداء داخلي يمكن أن ينص عليها على النحو التالي :

٣ــ٢ــ٢ مبرهنة (الاتمام)

يوجد لاي فضاء جداء داخلي X فضاء لهلبرت H وايزومورفيزم A من X على فضاء جزئي كثيف W في H • ان الفضاء H وحيد اذا ما استثنينا الايزومورفيزمات •

البرهان :

يوجد استنادا الى المبرهنة ٢ــ٣ــ٢ فضاء لباناخ H وتطبيق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من H كثيف في H • ولاسباب تعود الى الاستمرار ، فان المجاميع والمضاعفات العددية وفق هذا التطبيق لعناصر في X و W تتقابل

فيما بينها ، بحيث أن A هو ايزومورفيزم لـ X على W باعتبار كل منهما فضاء منظما • وتبين التمهيدية ٣ـ٢ـ٢ أنه يمكن تعريف جداء داخلي على H بأن نضع

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle,$$

حيث أوردنا الرموز نفسها كما في المبرهنة ٢ـ٣ـ٢ (وفي ١ـ٦ـ٢) ، أي أن (x_n) و (y_n) ممثلان لـ $\hat{x}$ في H ولـ $\hat{y}$ في H أيضا على الترتيب • فاذا أدخلنا في اعتبارنا (9) و (10) من البند ٣ـ١ ، فاننا نرى بأن A ايزومورفيزم لـ X على W ، وذلك باعتبارهما فضاءي جداء داخلي •

ان المبرهنة ٢ـ٣ـ٢ تضمن كذلك كون H وحيدا اذا ما استثنينا التطبيقات الايزومترية ، بمعنى أنه اذا كان H و $\tilde{H}$ إتمامين لـ X ، فانهما يرتبطان بتطبيق ايزومتري $T: H \longrightarrow \tilde{H}$ • واذا أجرينا محاكمة مماثلة لما فعلناه في حالة A ، فاننا نستخلص أن T يجب أن يكون ايزومورفيزما لفضاء هلبرت H على فضاء هلبرت $\tilde{H}$ • ∎

يعرف **الفضاء الجزئي** Y من فضاء جداء داخلي X بأنه فضاء جزئي متجهي من X (البند ٢ـ١) مزود بالمقصور على $Y \times Y$ للجداء الداخلي المعرف على X •

وبصورة مماثلة ، فان **الفضاء الجزئي** Y من فضاء هلبرت H يعرف بأنه فضاء جزئي من H باعتباره فضاء جداء داخلي • لاحظ بأنه ليس من الضروري أن يكون Y فضاء هلبرت ، ذلك أن Y قد لا يكون تاما • وفي الحقيقة ، فاننا نستنتج من المبرهنتين ٢ـ٣ـ١ و ٢ـ٤ـ٢ مباشرة الدعويين (آ) و (ب) الواردتين في المبرهنة التالية :

٣ـ٢ـ٤ مبرهنة (الفضاء الجزئي)

ليكن Y فضاء جزئيا من فضاء هلبرت H • عندئذ تصح الدعاوى التالية :

(آ) Y الشرط اللازم والكافي كي يكون Y تاما هو أن يكون مغلقا في H •

(ب) اذا كان Y منتهي البعد ، فانه تام

(ج) اذا كان H فصولا ، فان Y يكون كذلك . وبوجه أعم ، فان كل مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي فصول فصولة .

هذا ، ونترك للقارىء القيام بسرد البرهان البسيط للشق (جـ) .

مسائل

١ ــ ما هي متباينة شفارتز في $\mathbb{R}^2$ وفي $\mathbb{R}^3$. قدم برهانا آخر لها في هاتين الحالتين .

٢ ــ أورد أمثلة لفضاءات جزئية من l^2 .

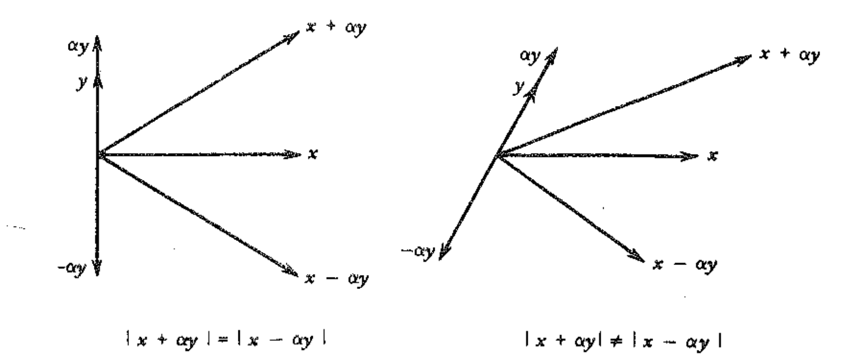
٣ ــ ليكن X فضاء جداء داخلي مؤلف من الحدودي $x=0$ (راجع الملاحظة الواردة في المسألة ٩ من البند ٢ــ٩) ومن كل الحدوديات الحقيقية في t التي درجة كل منها لاتتجاوز 2 ، والمعرفة على $[a, b]$ ، حيث الجداء الداخلي هو ذاك المعرف بالمساواة (7) من البند ٣ــ١ . أثبت أن X تام . ليكن Y مؤلفا من جميع العناصر x من X بحيث أن $x(a)=0$. هل يشكل Y فضاء جزئيا من X ؟ وهل تشكل كل العناصر x من X التي درجة كل منها 2 فضاء جزئيا من X ؟

٤ ــ بين أن الشرطين $y \perp x_n$ و $x_n \longrightarrow x$ معا يقتضيان أن $x \perp y$.

٥ ــ أثبت أنه اذا كانت (x_n) متتالية في فضاء جداء داخلي ، فان الشرطين $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ و $\langle x_n, x\rangle \longrightarrow \langle x, x\rangle$ معا يقتضيان التقارب $x_n \longrightarrow x$.

٦ ــ أثبت صحة الدعوى الواردة في المسألة ٥ وذلك في حالة المستوي العقدي .

٧ ــ برهن أنه في فضاء جداء داخلي ، فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المساواة $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$ أيا كان العدد α . (انظر الشكل ٢٥) .



الشكل (٢٥) • ايضاح المسالة٧ في المستوي الاقليدي R^2

٨ ــ أثبت أنه في فضاء جداء داخلي ، يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون $x \perp y$ هو أن تتحقق المتباينة $\|x+\alpha y\| \geqq \|x\|$ أيا كان العدد α •

٩ ــ ليكن V الفضاء المتجهي لجميع الدوال العقدية المستمرة على $J=[a, b]$ • لنفترض أن $X_1=(V, \|\cdot\|_\infty)$ حيث $\|x\|_\infty = \max_{t \in J} |x(t)|$ ، وأن $X_2=(V, \|\cdot\|_2)$ حيث

$$\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2}, \qquad \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

أثبث أن التطبيق المطابق $x \longmapsto x$ لـ X_1 على X_2 مستمر • (هـذا التطبيق ليس هوميومورفيزما ، نظرا لكون X_2 غير تام) •

١٠ــ **(المؤثر الصفري)** • ليكن $T: X \longrightarrow X$ مؤثرا خطيا محدودا على فضاء جداء داخلي عقدي X • فاذا كان $\langle Tx, x\rangle = 0$ أيا كان x من X ، فأثبت أن $T=0$ •

بين أن هذا غير صحيح في حالة فضاء جداء داخلي حقيقي • **إرشاد** • خذ دورانا للمستوي الاقليدي •

٣-٣ المتممات العامدة والمجاميع المباشرة

تعرف المسافة δ بين عنصر x في فضاء متري X ومجموعة جزئية غير خالية M في X بأنهـا

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} d(x, \tilde{y}) \qquad (M \neq \varnothing).$$

وتغدو هذه المساواة ، في فضاء منظم على الشكل التالي :

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| \qquad (M \neq \varnothing). \tag{1}$$

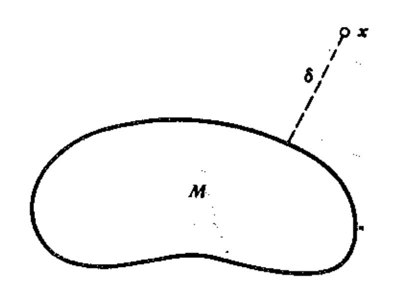
ويعطي الشكل ٢٦ مثالا ايضاحيا بسيطا •

وسنرى بأنه من المهم معرفة ما اذا كان هنالك عنصر y من M بحيث أن

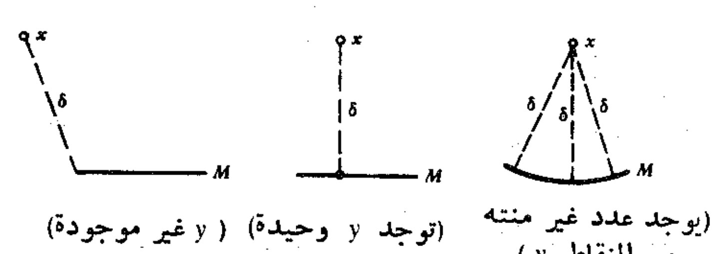
$$\delta = \|x - y\|, \tag{2}$$

وهذا يعني ببساطة وجود نقطة y من M هي أقرب ما يكون الى نقطة معطاة x ، واذا وجدت مثل هذه النقطة ، فهل هي وحيدة ؟ وواضح أننـا هنـا في سياق **مسألة وجود ووحدانية** • وهذه المسألة بالغة الاهمية مـن الوجهتين النظريـة والتطبيقية ، اذ أننا نقابلها مثلا في سياق دراستنا لموضوع تقريب الدوال •

ويشير الشكل ٢٧ الى أنه حتى في حالة جد بسيطة كحالة المستوي الاقليدي $\mathbf{R}^2$ ، فقد لانجد نقطة y تحقق (2) ، أو أنه توجد نقطة واحدة فقط y ، أو أنه يوجد أكثر من نقطة واحدة y • وقد تتوقع بأن الامر سيكون أعقد بدرجة كبيرة في فضاءات أخرى ، وبوجه خاص في الفضاءات غير منتهية البعد • وفعلا ، فان هذا هو الواقع في الفضاءات المنظمة العامة (كما سنرى في الفصل السادس) . في حين أن الوضع يبقى بسيطا نسبيا في فضاءات هلبرت • ان هذه الحقيقة مثيرة للدهشة ، ولها نتائج متنوعة من الوجهتين النظرية والتطبيقية ، وهي تشكل احدى الاسباب الرئيسية التي تعلل بساطة فضاءات هلبرت اذا ما قورنت بفضاءات باناخ العامـة •



الشكل (٢٦) • ايضاح (1) في حالة المستوي R^2



الشكل (٢٧) • وجود ووحدانية نقاط y من M محققة للشرط (2) ، حيث M قطعه مستقيمة مفتوحة في R^2 في الشكلين الايسر والاوسط وقوس دائرة في الشكل الايمن

ولحل مسألة الوجود والوحدانية في فضاءات هلبرت ، وصياغة المبرهنة الرئيسية ٣ـ٣ـ١ (الواردة بعد قليل) ، فانه يلزمنا مفهومان لهما أهمية كبيرة ، نوردهما فيما يلي :

تعرف **القطعة المستقيمة** الواصلة بين عنصرين x و y من فضاء متجهي X بأنها مجموعة كل العناصر z من X من الشكل

$$z = \alpha x + (1-\alpha) y \qquad (\alpha \in \mathbf{R}, 0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

ويقال عن مجموعة جزئية M من X انها **محدبة** اذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين x و y في M محتواة في M • ويعطي الشكل ٢٨ مثالا بسيطا على مجموعة محدبة •

وعلى سبيل المثال ، فان كل فضاء جزئي Y من X محدب ، كما أن تقاطع مجموعات محدبة هو مجموعة محدبة •

بعد هذا يمكننا أن نورد الاداة الرئيسية في هذا الفصل المتمثلة بالمبرهنة التاليـــة :

الشكل (٢٨) ، مثال ايضاحي لقطعة مستقيمة في مجموعة محدبة

٣-٣-١ مبرهنة (المتجه المُصغِّر) ،

ليكن X فضاء جداء داخلي ، ولتكن M مجموعة جزئية غير خالية ومحدبه وتامة (بالنسبة للمترك المحدد بالجداء الداخلي) ، عندئذ يوجد لكل عنصر x من X عنصر وحيد y من M بحيث يكون

$$\delta = \inf_{\bar{y}\in M} \|x - \bar{y}\| = \|x - y\|. \qquad (3)$$

البرهـــان :

(آ) الوجــود ، نجد استنادا الى تعريف الحد الادنى أن ثمــة متتالية (y_n) في M بحيث أن

$$\delta_n \longrightarrow \delta \quad \text{و} \quad \delta_n = \|x - y_n\|. \qquad (4)$$

سنبين أن (y_n) هــي متتالية كوشــي ، فــاذا وضعنا $y_n - x = v_n$ ، نجــد أن $\|v_n\| = \delta_n$.

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m - 2x\| = 2\,\|\tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x\| \geqq 2\delta$$

وذلك لكون M محدبة ، الامر الذي يقتضي أن $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ • كذلك ، فلدينا $y_n - y_m = v_n - v_m$ • لذا فانه يترتب على مساواة متوازي الاضلاع أن

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2)$$
$$\leqq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n{}^2 + \delta_m{}^2),$$

وبالتالي فان (4) تقتضي أن تكون (y_n) متوالية كوشي • ولما كانت M تامة ، فان (y_n) متقاربة ، ولنفترض مثلا أن $y_n \longrightarrow y \in M$ • وبما أن $y \in M$ ، فان $\|x - y\| \geqq \delta$ • كذلك ، فاننا نجد اعتمادا على (4) أن

$$\|x - y\| \leqq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| = \delta_n + \|y_n - y\| \longrightarrow \delta.$$

وهذا يبين أن $\|x - y\| = \delta$ •

(ب) الوحدانية • سنفترض أن العنصرين y و y_0 في M يحققان المساواتين

$$\|x - y\| = \delta \qquad و \qquad \|x - y_0\| = \delta$$

ونبين من ثم أن $y_0 = y$ • نلاحظ استنادا الى مساواة متوازي الاضلاع أن

$$\|y - y_0\|^2 = \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2$$
$$= 2\,\|y - x\|^2 + 2\,\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2$$
$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2\,\|\tfrac{1}{2}(y + y_0) - x\|^2.$$

وبما أن المقدار $\frac{1}{2}(y + y_0)$ الموجود في الطرف الايمن ينتمي الى M ، فان

$$\|\tfrac{1}{2}(y + y_0) - x\| \geqq \delta.$$

يترتب على هذا أن الطرف الايمن أصغر من المقدار $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$ أو يساويه • لذا فاننا نجد المتباينة $\|y - y_0\| \leqq 0$ • وبما أن لدينا دوما $\|y - y_0\| \geqq 0$ ، فانه يجب أن نقع على المساواة $\|y - y_0\| = 0$ ، التي تكافىء كون $y_0 = y$ • ∎

اذا انتقلنا من المجموعات المحدبة الكيفية الى فضاءات جزئية ، فاننا نجـد تمهيدية تعمم الفكرة المألوفة في الهندسة الابتدائية والتي تنص على أنـه يمكن ايجاد النقطة الوحيدة y في فضاء جزئي معطى Y والتي هي أقرب ما يكون الـى نقطة ما x « باسقاط عمود من x على Y » •

٣-٣-٢ تمهيدية (التعامد)

لنفترض في المبرهنة ٣-٣-١ أن M فضاء جزئي تام Y وأن x نقطة مثبتة في X • عندئذ يكون $z = x - y$ عموديا على Y •

البرهـان :

اذا لم يصح كون $z \perp Y$ ، لوجدت نقطة y_1 من Y بحيث أن

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0. \tag{5}$$

من الواضح أن $y_1 \neq 0$ ، ذلك أنه اذا لم يتحقق هذا الامـر لكان $\langle z, y_1 \rangle = 0$ • وفضلا عن ذلك ، نرى أنه اذا كان α عددا ما ، فان

$$\begin{aligned} \|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha [\langle y_1, z \rangle - \bar{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle] \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha}\beta - \alpha [\bar{\beta} - \bar{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle]. \end{aligned}$$

ان المقدار المحصور بين القوسين $[\cdots]$ يغدو صفرا اذا افترضنا أن

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}.$$

يترتب على (3) أن $\|z\| = \|x - y\| = \delta$ ، وبالتالي فان معادلتنا تقتضي أن يكون

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \delta^2.$$

ولما كان هذا أمرا غير ممكن لاننا نجد عندئذ أن

$$z - \alpha y_1 = x - y_2 \qquad \text{حيث} \qquad y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$$

فان $\|z-\alpha y_1\| \geqq \delta$ وفق تعريف δ • لذا لا يمكن أن تتحقق (5) ، والتمهيدية صحيحـــة • ∎

ان هدفنا هو تمثيل لفضاء هلبرت على شكل مجموع مباشر بسيط وملائم لانه يفيد من التعامد • ولاستيعاب هذا الوضع وفهم هذه المسألة ، سنقدم أولا مفهوم المجموع المباشر • ان هـــذا المفهوم ذو معنى في حالــة أي فضاء متجهي ونورده على النحو التالي •

٣-٣-٢ تعريف (المجموع المباشر)

يقال عن فضاء متجهي X انه مجموع مباشر لفضاءين جزئيين Y و Z من X ، ونكتـــب

$$X = Y \oplus Z,$$

اذا كان لكل عنصر x من X تمثيل وحيد بالشكل

$$x = y + z \qquad y \in Y,\ z \in Z.$$

وعندئذ يسمى Z **المتمم الجبري** لـ Y في X ، وبالعكس ، كما يقال عن Y و Z انهمـــا **زوج متتام** من الفضاءات الجزئية من X • ∎

وعلى سبيل المثال ، ان $Y = \mathbf{R}$ فضاء جزئي من المستوي الاقليدي $\mathbf{R}^2$ •ومن الواضح أنه يوجد لـ Y عدد غير منته من المتممات الجبرية في $\mathbf{R}^2$ ، كل منهـــا محور حقيقي ، بيد أن أكثرها ملاءمة هو المتمم العمودي على Y • ويستفاد مـــن هذا لدى اختيارنا جملة احداثية ديكارتية • كذلك ، فاننا نجد الوضع نفسه من وجهة المبدأ في $\mathbf{R}^3$ •

وبصورة مماثلة ، فان اهتمامنا الرئيسي في حالة فضاء هلبرت العام H ينصب على تمثيل H بمجموع مباشر لفضاء جزئي مغلق Y **ومتممه العامد**

$$Y^{\perp} = \{z \in H \mid z \perp Y\},$$

الذي يتألف من مجموعة كل المتجهات العمودية على Y • وهذا يمدنا بالنتيجة الرئيسية لهذا البند ، والتي تدعى أحيانا **مبرهنة الاسقاط** لاسباب سنقوم بشرحها بعد البرهان •

٣-٣-٤ مبرهنة (المجموع المباشر)

ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هلبرت H • عندئذ يكون

$$H = Y \oplus Z \qquad Z = Y^{\perp} \tag{6}$$

البرهان :

لما كان H تاما و Y مغلقا ، فان Y تام كما تبين المبرهنة ١-٤-٧ • وبما أن Y محدب ، فانه يترتب على المبرهنة ٣-٣-١ والتمهيدية ٣-٣-٢ أنه يوجد لكل x في H عنصر y من Y بحيث يكون

$$x = y + z \qquad z \in Z = Y^{\perp}. \tag{7}$$

ولاثبات الوحدانية ، نفترض أن

$$x = y + z = y_1 + z_1$$

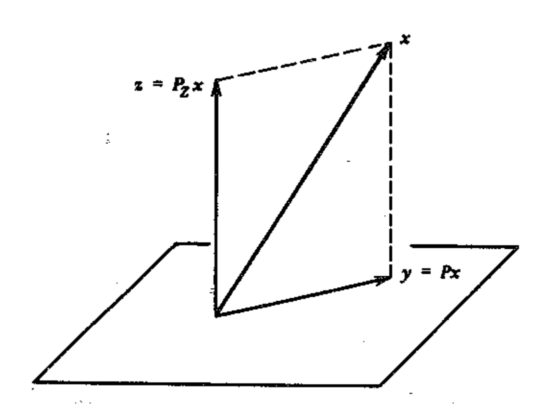
حيث y و y_1 عنصران من Y وحيث z و z_1 عنصران من Z • وعندئذ يكون $y - y_1 = z_1 - z$ • وبما أن $y - y_1$ عنصر من Y في حين أن $z_1 - z$ عنصر من Z الذي يساوي $Y^{\perp}$ ، فاننا نستنتج أن $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون $y = y_1$ • لذا فان $z = z_1$ أيضا • ∎

يسمى العنصر y الوارد في (7) **المسقط العمودي** لـ x على Y • (أو اختصارا **مسقط** x على Y) • وقد استوحينا هذه التسمية من الهندسة الابتدائية • [وعلى سبيل المثال ، يمكن أن نأخذ $H = \mathbf{R}^2$ ونسقط أي نقطة $x = (\xi_1, \xi_2)$ على المحور ξ_1 ، الذي يلعب عندئذ دور Y ، ونجد حينئذ أن $y = (\xi_1, 0)$] •

تحدد المعادلة (7) التطبيق

$$P:\ H \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y = Px.$$

ويسمى التطبيق P هذا **المسقط** (العمودي) ، أو **مؤثر الاسقاط** ، لـ H على Y • (انظر الى الشكل ٢٩) • من الواضح أن P مؤثر خطي محدود ، كما أنه تطبيق



الشكل (٢٩) • ايضاح يتعلق بالمبرهنة ٣ـ٣ـ٤ والدستور (9)

لـ H على Y ،
ولـ Y على Y نفسه ،
ولـ $Z = Y^{\perp}$ على $\{0\}$ •

وهو تطبيق **مراوح** ، أي أن

$$P^2 = P;$$

وهكذا ، فاننا نجد أيا كان x من H أن

$$P^2 x = P(Px) = Px.$$

وبالتالي فان $P|_Y$ هو التطبيق المطابق على Y • وفي الحالة $Z=Y^\perp$ ، فانه يترتب على هذه المناقشة التمهيدية التالية :

٣-٢-٥ تمهيدية (الفضاء الصفري)

ان المتمم المعامد $Y^\perp$ لفضاء جزئي مغلق Y في فضاء هلبرت H هو الفضاء الصفري $\mathcal{N}(P)$ للمسقط المعامد P لـ H على Y •

ان المتمم المعامد هو عادم خاص ، ونعني **بالعادم** $M^\perp$ لمجموعة غير خالية M في فضاء جداء داخلي X المجموعة

$$M^\perp=\{x\in X\,|\,x\perp M\}.$$

وهكذا فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $x\in M^\perp$ هو أن يكون $\langle x, v\rangle=0$ أيا كان v في M • وهذا يفسر سبب اسم « العادم » •

لاحظ بأن $M^\perp$ فضاء متجهي ، ذلك أنه اذا كان x و y عنصرين من $M^\perp$ ، فاننا نستنتج أنه أيا كان v من M ، وأيا كان العددان α و β فان

$$\langle \alpha x+\beta y, v\rangle=\alpha\langle x, v\rangle+\beta\langle y, v\rangle=0,$$

وبالتالي فان $\alpha x+\beta y\in M^\perp$ •

ان المجموعة $M^\perp$ مغلقة ، الامر الذي نترك اثباته للقارىء (المسألة ٨) •

سنرمز لـ $(M^\perp)^\perp$ بـ $M^{\perp\perp}$ ، •• وهكذا • ونجد بوجه عام أن

$$M\subset M^{\perp\perp} \tag{8*}$$

لان

$$x\in M \implies x\perp M^\perp \implies x\in (M^\perp)^\perp.$$

أما في حالة الفضاءات الجزئية المغلقة ، فاننا نجد النتيجة الاقوى التالية :

٣ـ٣ـ٦ تمهيدية (الفضاء الجزئي المغلق)

اذا كان Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هلبرت H ، فان

$$Y = Y^{\perp\perp}. \tag{8}$$

البرهــان :

ان $Y \subset Y^{\perp\perp}$ وفق (8*) • سنبين الآن أن $Y \supset Y^{\perp\perp}$ • ليكن x عنصرا مــن $Y^{\perp\perp}$ • عندئذ يترتب على ٣ـ٣ـ٤ أن $x = y + z$ ، حيــث $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ وفــق (8*) • ولما كان $Y^{\perp\perp}$ فضاء متجهيا وكان x عنصر من $Y^{\perp\perp}$ فرضا ، فاننا نجــد أيضا أن $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$ ، وبالتالي فان $z \perp Y^{\perp}$ • وبما أن $z \in Y^{\perp}$ استنادا الــى ٣ـ٣ـ٤ ، فاننا نجد مما سبق العلاقة $z \perp z$ التي تقتضي أن يكون $z = 0$ ، أي أن $x = y$ ، وهذا يعني أن $x \in Y$ • ولما كان العنصر x المنتمي الى $Y^{\perp\perp}$ اختياريا، فان هذا يبين أن $Y \supset Y^{\perp\perp}$ • ∎

ان المساواة (8) هي السبب الرئيسي في استعمالنا الفضاءات الجزئيــة **المغلقــة** في هذا السياق • وبما أن $Z^{\perp} = Y^{\perp\perp} = Y$ ، فانــه يمكن كتابة الدستور (6) بالشــكل

$$H = Z \oplus Z^{\perp}.$$

يترتب على هذا أن $x \longmapsto z$ يحدد مؤثر الاسقاط (انظر الى الشكل ٢٩)

$$P_Z: H \longrightarrow Z \tag{9}$$

لـ H على Z ، وخواص هذا المؤثر شبيهة تماما بخواص المؤثر p الذي درسناه فيما سبق •

تقتضي المبرهنة ٣ـ٣ـ٤ مباشرة صفة مميزة لتلك المجموعات M في فضاء هلبرت التي يكون $\text{span}\ M$ لها مجموعة كثيفة ، الامر الذي تحدده التمهيدية التاليــة :

٣ـ٣ـ٧ تمهيدية (المجموعة الكثيفة)

اذا كانت M مجموعة جزئية غير خالية في فضاء هلبرت H ، فان الشرط اللازم والكافي كي تكون $\text{span}\, M$ مجموعة كثيفة في H هو أن يكون $M^{\perp} = \{0\}$ •

البرهان :

(آ) ليكن x عنصرا من $M^{\perp}$ ، ولنفترض أن $V = \text{span}\, M$ كثيفة في H • عندئذ يكون $x \in \bar{V} = H$ • واستنادا الى الشق (آ) من المبرهنة ١ـ٤ـ٦ ، فانه توجد متتالية (x_n) في V بحيث أن $x_n \longrightarrow x$ • وبما أن $x \in M^{\perp}$ وأن $M^{\perp} \perp V$ ، فاننا نجد أن $\langle x_n, x \rangle = 0$ •نستنتج من هذا بناء على استمرار الجداء الداخلي (التمهيدية ٣ـ٢ـ٢) أن $\langle x_n, x \rangle \longrightarrow \langle x, x \rangle$ • لذا فان $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ ، الامر الذي يقتضي المساواة $x = 0$ • وبما أن x عنصر اختياري من $M^{\perp}$ ، فاننا نجد أن $M^{\perp} = \{0\}$ •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن $M^{\perp} = \{0\}$ • فاذا كان $x \perp V$ ، فان $x \perp M$ ، أي أن $x \in M^{\perp}$ ، وبالتالي فان $x = 0$ • لذا فان $V^{\perp} = \{0\}$ • واذا لاحظنا أن V فضاء جزئي من H ، فاننا نجد أن $\bar{V} = H$ استنادا الى ٣ـ٣ـ٤ حيث نفترض أن $Y = \bar{V}$ • ∎

مسائل

١ ــ ليكن H فضاء هلبرت و M مجموعة جزئية محدبة في H ، و (x_n) متتالية في M بحيث أن $\|x_n\| \longrightarrow d$ ، حيث $d = \inf_{x \in M} \|x\|$ • بين بأن (x_n) متقاربة في H • أورد مثالا يوضح هذا في $\mathbf{R}^2$ أو في $\mathbf{R}^3$ •

٢ ــ برهن أن المجموعة الجزئية $M = \{y = (\eta_j) \mid \sum \eta_j = 1\}$ في الفضاء العقدي $\mathbf{C}^n$ (راجع ٣ـ١ـ٤) تامة ومحدبة • أوجد متجه النظيم الاصغري في M •

٣ ــ (آ) بين أن الفضاء المتجهي X لكل الدوال الحقيقية المستمرة على $[-1, 1]$ هو المجموع المباشر لمجموعة كل الدوال المستمرة الزوجية ومجموعة كل الدوال المستمرة الفردية على $[-1, 1]$ • (ب) أورد أمثلة لتمثيلات لـ $\mathbf{R}^3$ على شكل مجموع مباشر (i) لفضاء جزئي ولمتممه المعامد ، (ii) لزوج من الفضاءات الجزئية المتتامة •

٤ ــ (آ) بين بأن نتيجة المبرهنة ٣ــ٣ــ١ تظل سارية في حالة كون X فضاء هلبرت و M فضاء جزئيا مغلقا في X • (ب) كيف يمكن استخدام متطابقة ابولونيوس (الواردة في المسألة ٥ من البند ٣ــ١) في اثبات المبرهنة ٣ــ٣ــ١ ؟

٥ ــ ليكن $X = \mathbf{R}^2$ • أوجد $M^\perp$ في كل من الحالات التالية : (آ) $M = \{x\}$ ، حيث $x = (\xi_1, \xi_2) \neq 0$ ، (ب) $M = \{x_1, x_2\}$ ، حيث $\{x_1, x_2\}$ جملة مستقلة خطيا في X •

٦ ــ أثبت أن $Y = \{x \mid x = (\xi_j) \in l^2, \xi_{2n} = 0, n \in \mathbf{N}\}$ فضاء جزئي مغلق في l^2 ، ثم جد $Y^\perp$ • حدد $Y^\perp$ اذا كان $Y = \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\} \subset l^2$ حيث $e_j = (\delta_{jk})$ •

٧ ــ لتكن A و $B \supset A$ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين في فضاء جداء داخلي X • بين أن

(آ) $A \subset A^{\perp\perp}$ ، (ب) $B^\perp \subset A^\perp$ ، (جـ) $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$

٨ ــ بين بأن العادم $M^\perp$ لمجموعة غير خالية M في فضاء جداء داخلي X هو فضاء جزئي مغلق في X •

٩ ــ أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء هلبرت H مغلقا في H هو أن يكون $Y = Y^{\perp\perp}$ •

١٠ــ اذا كانت M أي مجموعة جزئية غير خالية من فضاء هلبرت H ، فبين بأن المجموعة $M^{\perp\perp}$ هي أصغر فضاء جزئي مغلق في H يحوي M ، أي أن $M^{\perp\perp}$ محتواة في كل فضاء جزئي مغلق Y من H يحقق الشرط $Y \supset M$ •

٣ــ٤ المجموعات والمتتاليات المتعامدة المنظمة

ان التعامد ، كما سبق وعرفناه في البند ٣ــ١ ، يلعب دورا أساسيا في فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت • وقد لمسنا هذه الحقيقة أولا في

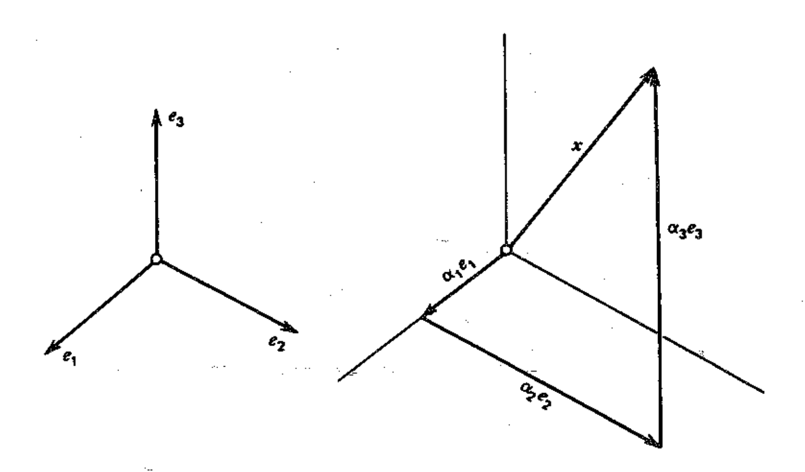
البند السابق • وتهمنا بوجه خاص تلك المجموعات التي عناصرها متعامدة مثنى • وكي تفهم ما يعنيه هذا ، سنعيد الى الذاكرة أمرا معروفا في الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^3$ • ففي الفضاء $\mathbf{R}^3$ ، تكون مجموعة من هذا النوع المجموعة المؤلفة من ثلاثة متجهات واحدية وفق الاتجاهات الموجبة للمحاور في جملة احداثية متعامدة ، ولنرمز لهذه المتجهات e_1 ، e_2 ، e_3 • تشكل هذه المتجهات قاعدة لـ $\mathbf{R}^3$ ، وبالتالي فلكل عنصر x من $\mathbf{R}^3$ تمثيل وحيد من النمط

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

كما في الشكل ٣٠ • ونرى الآن فائدة جلى للتعامد • فاذا أعطينا x ، فانه يمكننا أن نعين مباشرة المعاملات المجهولة α_1 و α_2 و α_3 بأخذ الجداءات الداخلية • وفي الحقيقة ، فاننا نجد α_1 بضرب تمثيل x بـ e_1 ، أي أن

$$\langle x, e_1\rangle = \alpha_1\langle e_1, e_1\rangle + \alpha_2\langle e_2, e_1\rangle + \alpha_3\langle e_3, e_1\rangle = \alpha_1,$$

وهكذا • توجد في فضاءات الجداء الداخلي الاعم امكانات مماثلة أخرى لاستعمال المجموعات والمتتاليات المتعامدة والمتعامدة المنظمة ، الامر الذي



الشكل (٣٠) • المجموعة المتعامدة $\{e_1, e_2, e_3\}$ **في** $\mathbf{R}^3$ **والتمثيل** $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

سنوضحه بعد قليل • وفعلا فان استعمال مثل هذه المجموعات والمتتاليات يؤلف جزءا أساسيا من نظرية فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت بأكملها • وسنبتدىء دراستنا لهذا الامر بادراج المفاهيم الضرورية •

٣ــ٤ــ١ (المجموعات والمتتاليات المتعامدة المنظمة)

المجموعة المتعامدة M في فضاء جداء داخلي X هي مجموعة جزئية M من X عناصرها متعامدة مثنى • أما **المجموعة المتعامدة المنظمة** M في X فهي مجموعة متعامدة في X نظيم كل من عناصرها يساوي 1 ، أي أنه اذا كان x و y أي عنصرين من M فان

$$(1) \qquad \langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq y \\ 1 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

واذا كانت مجموعة M متعامدة أو متعامدة منظمة وكانت M عدودة (أي قابلة للعد) ، فيمكننا أن نرتبها في متتالية (x_n) ندعوها **متتاليه متعامدة او متعامدة منظمة** على الترتيب •

وبوجه أعم ، فانه يقال عن مجموعة ذات أدلة ، أي عن **الجماعة** $(x_\alpha),\ \alpha \in I$ ، انها **متعامدة** اذا كان $x_\alpha \perp x_\beta$ أيا كان العنصران المختلفان α ، β من I • وتسمى هذه الجماعة **متعامدة منظمة** اذا كانت متعامدة وكان نظيم كل x_α يساوي 1 ، وعندئذ نجد أنه أيا كان α و β من I فان

$$(2) \qquad \langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{if } \alpha = \beta. \end{cases}$$

ويرمز $\delta_{\alpha\beta}$ هنا الى دلتاكرونيكر ، كما سبق وذكرنا في البند ٢ــ٩ • ∎

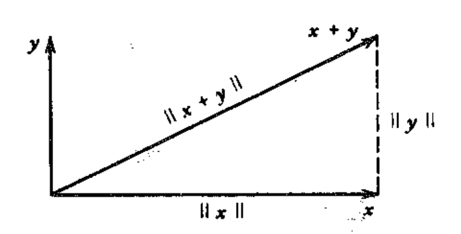
واذا احتاج القارىء الى المزيد من المعلومات حول الجماعات والمفاهيم المرتبطة بها ، فعليه أن يرجع الى A1.3 من الملحق 1 الوارد في آخر هذا الكتاب • وعندها سيلحظ أن المفاهيم الواردة في التعريف السابق قريبة أحدها

من الآخر • وسبب ذلك يعود الى أنه يمكن أن نجد دائما لكل مجموعة جزئيـة M من X جماعة من عناصر X بحيث تكون مجموعة عناصر الجماعة هـي M • وبوجه خاص ، يمكن أخذ الجماعة المعرفة **بالتطبيق المتباين الطبيعي** لـ M في X ، أي المقصور على M للتطبيق المطابق $x \longmapsto x$ على X •

سنبحث الآن في بعض الخـواص البسيطة للمجموعات المتعامدة والمتعامدة المنظمة كما سنورد أمثلة عليها •

اذا كان x و y عنصرين متعامدين ، فاننا نجد $\langle x, y \rangle = 0$ ، الامـر الـذي يعطي رأسا **علاقة فيثاغورس**

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{3}$$



الشكل (٣١) • علاقة فيثاغورس (3) في $\mathbf{R}^2$

ويبين الشكل ٣١ مثالا مألوفا • وبشكل أعم ، فاذا كانت $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعـة متعامـدة ، فـان

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2. \tag{4}$$

وفعلا ، فان $\langle x_j, x_k \rangle = 0$ اذا كان $j \neq k$ ، لذا فان

$$\left\|\sum_j x_j\right\|^2 = \left\langle \sum_j x_j, \sum_k x_k \right\rangle = \sum_j \sum_k \langle x_j, x_k \rangle = \sum_j \langle x_j, x_j \rangle = \sum_j \|x_j\|^2$$

(يتم الجمع من 1 حتى n) • كذلك ، فاننا نجد ما يلي :

٣ــ٤ــ٢ تمهيدية (الاستقلال الخطي)

المجموعة المتعامدة المنظمة مستقلة خطيا ٠

البرهــان :

لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ متعامدة منظمة ، ولننظر في المعادلة

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0.$$

فاذا ضربنا بالمتجه المثبت e_j ، نجد أن

$$\left\langle \sum_k \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_k \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j = 0$$

وهذا يثبت الاستقلال الخطي لكل مجموعة متعامدة منظمة منتهية ٠ ويقتضي هذا أيضا الاستقلال الخطي في حالة كــون المجموعة المتعامدة المنظمــة المعطاة غــير منتهية ، وذلك وفق تعريف الاستقلال الخطي الذي أوردناه في البند ٢ــ١ ٠ ∎

امثلــة

٣ــ٤ــ٣ الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^3$

ان المتجهات الواحدية الثلاثة $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ باتجاه المحاور الثلاثة في جملة احداثية متعامدة في الفضاء $\mathbf{R}^3$ تشكل مجموعة متعامدة منظمة ٠ (انظر الى الشكل ٣٠) ٠

٣ــ٤ــ٤ الفضــاء l^2

ان (e_n) ، بفرض أن $e_n = (\delta_{nj})$ (حيث العنصر الذي ترتيبه n يساوي 1 ، والعناصر الاخرى أصفار) ، تشكل متتاليــة متعامدة منظمة في الفضــاء l^2 ٠ (راجع البند ٣ــ١ــ٦) ٠

٣ـ٤ـ٥ الدوال المستمرة

ليكن X فضاء الجداء الداخلي المؤلف من كل الدوال المستمرة على $[0,2\pi]$ ، والمزودة بالجداء الداخلي المعرف بالمساواة

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\, dt$$

(راجع ٣ـ١ـ٥) • إن (u_n) ، حيث

$$u_n(t) = \cos nt \qquad n = 0, 1, \cdots .$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة في X • كذلك ، فان (v_n) ، حيث

$$v_n(t) = \sin nt \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة أخرى في X •

وفي الحقيقة ، فاننا نجد بعد المكاملة أن

$$(5) \qquad \langle u_m, u_n\rangle = \int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt\, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \quad \text{اذا كان} \\ \pi & m = n = 1, 2, \cdots \quad \text{اذا كان} \\ 2\pi & m = n = 0 \quad \text{اذا كان} \end{cases}$$

ونجد نتيجة مماثلة لـ (v_n) • لذا فان (e_n) ، حيث

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة • ومن (v_n) نجد متتالية متعامدة منظمة $(\tilde{e}_n)$ ، حيث

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{v_n(t)}{\|v_n\|} = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

لاحظ أننا نجد هنا أن $u_m \perp v_n$ أيا كان m و n (أورد البرهان على هذا) • وترد هذه المتتاليات في **متسلسلة فورييه** ، الامـــر الذي سنناقشه في البنـــد القادم • وهذه الامثلة كافية لاعطاء انطباع أولي عن هذا الموضوع • وسنورد متتاليات متعامدة منظمة أخرى ذات أهمية تطبيقية في البند ٣ــ٧ • ∎

ان المتتاليات المتعامدة المنظمـــة تمتاز على المتتاليات الكيفية المستقلة خطيـــا بالامر التالي : اذا علمنا بأن عنصرا ما x يمكن أن يمثل بتركيب خطي لبضعـــة عناصر من متتالية متعامدة منظمة ، فان صفة التعامد والنظامية تجعل من التعيين الفعلي للمعاملات عملية بسيطة • وفي الحقيقة ، فاذا كانت $(e_1, e_2, \cdots)$ متتاليـــة متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، وكان $x \in \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ ، حيث n مثبت ، فاننا نجد استنادا الى تعريف span (البند ٢ــ١) أن

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \tag{6}$$

واذا أخذنا الجداء الداخلي بضرب طرفي هذه المساواة بالمتجه المثبت e_j ، فاننا نجـــد أن

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j.$$

وبالتالي فان (6) تغدو بالشكل

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k. \tag{7}$$

وهذا يبين بأن تعيين المعاملات المجهولة في (6) أمر سهل • وثمة ميزة أخرى لصفـــة التعامـــد والنظامية تتلخص في أنـــه اذا أردنا أن نضيف فـــي (6) و (7) حدا آخر $\alpha_{n+1} e_{n+1}$ بهدف دراسة

$$\tilde{x} = x + \alpha_{n+1} e_{n+1} \in \text{span}\{e_1, \cdots, e_{n+1}\};$$

فاننا نحتاج عندئذ لحساب معامل واحد اضافي فقط ، ذلك أن المعاملات الاخرى تبقى على حالها .

وبوجه أعم ، اذا كان x عنصرا ما من X غير منتم بالضرورة الى $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ ، فمن الممكن تعيين y من Y_n بوضع

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \tag{8a}$$

حيث n عنصر مثبت ، كما في السابق ، ومن ثم تعيين z بوضع

$$x = y + z, \tag{8b}$$

أي أن $z = x - y$. سنبين أن $z \perp y$. ولفهم حقيقة ما يجري ، نلاحظ أن كل y من Y_n هو تركيب خطي

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k .$$

حيث $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle$ ، الامر الذي ينتج باتباع أسلوب المناقشة الذي سلكناه قبل قليل . وما ندعيه هو أنه لكل اختيار خاص لـ $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle, \ k = 1, \cdots, n$ فاننا نجد y بحيث يكون $z = x - y \perp y$.

ولاثبات هذا نلاحظ أولا أنه يترتب على التعامد والنظامية أن

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum \langle x, e_k \rangle e_k, \sum \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{9}$$

وبالافادة من هذا ، يمكننا الان أن نثبت بأن $z \perp y$:

$$\begin{aligned}
\langle z, y \rangle = \langle x - y, y \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle \\
&= \left\langle x, \sum \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - \|y\|^2 \\
&= \sum \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} - \sum |\langle x, e_k \rangle|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

وبالتالي فان علاقة فيثاغورس (3) تعطي بالمساواة

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2. \qquad (10)$$

ويترتب على (9) أن

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum |\langle x, e_k\rangle|^2. \qquad (11)$$

ولما كان $\|z\| \geqq 0$ ، فاننا نجد لكل $n = 1, 2, \cdots$ أن

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqq \|x\|^2. \qquad (12^*)$$

ان الحدود المجموعة هنا غير سالبة ،وبالتالي فان المجاميع في الطرف الايسر تشكل متتالية رتيبة متزايدة • وهذه المتتالية متقاربة نظرا لكونها محدودة بالعدد $\|x\|^2$ • ولما كانت هذه المتتالية هي متتالية المجاميع الجزئية من متسلسلة غير منتهية ، فان هذه المتسلسلة متقاربة • وبالتالي فان (12*) تقتضي التالي :

٣ــ٤ــ٦ مبرهنة (متباينة بسل)

اذا كانت (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، فاننا نجد انه أيا كان x من X المتباينة التالية

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqq \|x\|^2 \qquad (12)$$

متباينة بسل

تدعى الجداءات الداخلية $\langle x, e_k\rangle$ في (12) **معاملات فورييه** للعنصر x بالنسبة للمتتالية المتعامدة المنظمة (e_k) •

لاحظ أنه اذا كان X غير منتهي البعد ، فان كل مجموعة متعامدة و منظمة في X يجب أن تكون منتهية نظرا لانها مستقلة خطيا استنادا الى ٣ــ٤ــ٢ • لذا فاننا نجد في (12) عندئذ مجموعا منتهيا •

رأينا أن المتتاليات المتعامدة و المنظمة هي من النوع الذي يسهل التعامل معه • وسنشرح الآن مسألة عملية تتعلق بكيفية الحصول على متتالية متعامدة ومنظمة عندما تعطى سلفا متتالية كيفية مستقلة خطيا • ويمكن القيام بهذا باجراء

انشائي يسمى طريقة جرام ـ شميت في تحويل متتالية مستقلة خطيا (x_j) في فضاء جداء داخلي الى متتالية متعامدة منظمة ، وللمتتالية المتعامدة المنظمة (e_j) الحاصلة خاصة تتلخص في أنه أيا كان n فان

$$\text{span}\{e_1, \cdots, e_n\} = \text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}.$$

وتتم الطريقة وفق الخطوات التالية :

الخطوة الاولى . المتجه الاول من (e_k) هو

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1.$$

الخطوة الثانيه . يمكن كتابة x_2 بالشكل

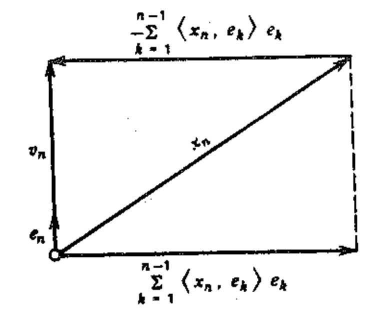
$$x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2.$$

عندها يكون (كما في الشكل ٣٢) المتجه

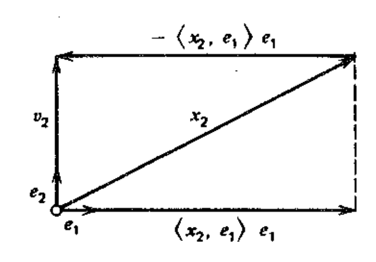
$$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$$

مغايرا للمتجه [illegible] مستقلة خطيا ، كذلك فان $v_2 \perp e_1$ نظرا لكون $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$ [illegible] فيمكننا أن نأخذ

$$e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2.$$



الشكل (٣٣) . الخطوة n في طريقة جرام ـ شميت



الشكل (٣٢) . الخطوة الثانية في طريقة جرام ـ شميت

الخطوة الثالثة . المتجـه

$$v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2$$

مختلف عن المتجه الصفري ، كما أن $v_3 \perp e_1$ و $v_3 \perp e_2$. نأخذ

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3.$$

الخطوة n . المتجه (انظر الشكل ٣٣)

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k \tag{13}$$

مغاير للمتجه الصفري ، وهو عمودي على $e_1, \cdots, e_{n-1}$. ونجد منه المتجـه

$$e_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n. \tag{14}$$

ان هذه هي الدساتير العامة لطريقة جرام ـ شميت ، التي صممها شميت عام ١٩٠٧ م . وأيضا غرام عام ١٨٨٣ م . لاحظ بأن الحـد المطروح في الطرف الايمن من (13) هو مسقط x_n على $\text{span}\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$. وبعبارة أخـرى ، فاننا في كل خطوة نطرح من x_n « مركباته » في اتجاهات المتجهات التي سبق وحولناها الى متجهات متعامدة ونظامية . وبذا نحصل على v_n ، الذي نضربه بعد ذلك بـ $1/\|v_n\|$ فنحصل على متجه نظيمه 1 . ان v_n لا يمكن أن يكون المتجه الصفري أيا كان n . وفعلا ، فاذا كان n أصغر دليل يكون من أجله $v_n = 0$ ، فان (13) تبين عندئذ أن x_n هو تركيب خطي لـ $e_1, \cdots, e_{n-1}$ ، وبالتالي تركيب خطي لـ $x_1, \cdots, x_{n-1}$ ، وهذا يناقض افتراضنا بأن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعة مستقلة خطيـا .

مسائل

١ ـ بين بأنه يوجد لفضاء داخلي بعده منتـه ويساوي n قاعـدة $\{b_1, \cdots, b_n\}$ متجهاتها متعامدة ومنظمة • (سنتطرق الى حالة البعد غير المنتهي في البند ٣ـ٦) •

٢ ـ كيف يمكن تأويل (*12) هندسيا في $\mathbf{R}^r$ ، حيث $r \geqq n$ ؟

٣ ـ استخرج متباينة شفارتز الواردة في البند ٣ـ٢ انطلاقا من (*12) •

٤ ـ أورد مثالا على عنصر x في l^2 بحيث نجد متباينة تامة في (12) •

٥ ـ اذا كانت (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، وكان x عنصرا في X ، فبين أن $x-y$ ، حيث y معطى بالمساواة

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \qquad\qquad \alpha_k = \langle x, e_k \rangle$$

عمودي على الفضاء الجزئي $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, \cdots e_n\}$ •

٦ ـ **(خاصة القيمة الصغرى لمعاملات فورييه)** • لتكن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ مجموعـة متعامدة منظمة في فضاء جـداء داخلي X ، حيث n مثبت • ليكن x أي عنصر مثبت في X و $y = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$ • عندئذ يكون $\|x-y\|$ تابعا لـ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ • بين بالحساب المباشر أن الشرط اللازم والكافي كي يكـون $\|x-y\|$ أصغريا هو أن يكون $\beta_j = \langle x, e_j \rangle$ حيث $j = 1, \cdots, n$ •

٧ ـ لتكن (e_k) أي متتالية متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X • بيـن أنه اذا كان x و y أي عنصرين من X فان

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leqq \|x\| \|y\|.$$

٨ ـ بين أنه لا يمكن أن يوجد لعنصر x في فضاء جداء داخلي X « عدد كبير » من معاملات فورييه $\langle x, e_k \rangle$ « الكبيرة » • نفترض هنا أن (e_k) متتالية

متعامدة منظمة معطاة • وبصورة أدق ، بين أن العدد n_m للمقادير $\langle x, e_k \rangle$ التي تحقق الشرط $|\langle x, e_k \rangle| > 1/m$ يجب أن يحقق المتباينة $n_m < m^2 \|x\|^2$ •

٩ ــ حول الحدود الثلاثة الاولى من المتتالية $(x_0, x_1, x_2, \cdots)$ الى متجهات متعامدة منظمة ، بفرض أن $x_j(t) = t^j$ على الفترة $[-1, 1]$ ، حيث

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \, dt.$$

١٠ــ ليكن $x_1(t) = t^2$ و $x_2(t) = t$ و $x_3(t) = 1$ • حول x_1 و x_2 و x_3 الى متجهات متعامدة منظمة بهذا الترتيب على $[-1, 1]$ بالنسبة الى الجداء الداخلي في المسألة ٩ • قارن مع المسألة ٩ ، وقدم التعليق على ذلك •

٣ــ٥ المتسلسلات المرتبطة بالمتتاليات والمجموعات المتعامـدة المنظمـة

ثمة حقائق وتساؤلات ترد حول متباينة بسل • وفي هذا الفصل ، سنجد أولا مبررا لتبني مصطلح « معاملات فورييه » ، ومن ثم ندرس المتسلسلات غير المنتهية المرتبطة بالمتتاليات المتعامدة المنظمة ، وأخيرا نلقي نظـرة أولى علـى المجموعات المتعامدة المنظمة غير العدودة •

٣ــ٥ــ١ مثال (متسلسلة فورييه)

المتسلسلة المثلثاتية هى متسلسلة من النمط

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{1*}$$

ويقال عن دالة حقيقية x معرفة على $\mathbf{R}$ انها **دوريـة** اذا وجد عـدد موجب p (يدعى **دور** x) بحيث يكون $x(t+p) = x(t)$ أيا كان t من $\mathbf{R}$ •

لتكن x دالة دورية دورها 2π ومستمرة • نعرف **متسلسلة فورييه** للدوال

x بأنها المتسلسلة المثلثانية (1*) التي معاملاتها a_k و b_k محـــددة **بمساتي اولر** التاليـــة :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt\, dt \qquad k = 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt\, dt \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

وتسمى هذه المعاملات **معاملات فورييه للدالة** x •

اذا كانت متسلسلة فورييه للدالة x متقاربة أيا كـــان t وكان مجموعهـــا $x(t)$ ، فاننا نكتب عندئذ

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{1}$$

وبما أن x دورية ودورها 2π ، فاننا يمكن أن نستعيض في (2) عن فترة المكاملة $[0, 2\pi]$ بأي فترة أخرى طولها 2π ، وعلـــى سبيل المثـــال ، بالفتـــرة $[-\pi, \pi]$ •

لقد برزت متسلسلة فورييه في أول الامر في سياق المسائل الفيزيائية التي عالجها برنويي (الاوتار المهتزة ، عام ١٧٥٣ م) ، وفورييه (التوصيل الحراري ، عام ١٨٢٢) • وتساعد هذه المتسلسلات في تمثيل الظواهر الدورية المعقـــدة بدلالة دوال دورية بسيطة (الجيب وجيب التمام) ، ولها تطبيقات فيزيائية متنوعة فيما يتعلـــق بالمعادلات التفاضلية (الاهتزازات ، التوصيل الحـــراري ، مسائل الكمون ، وغيرها) •

نرى لدى النظر الى (2) أن تعيين معاملات فورييه يتطلب اجراء عمليات مكاملة • وللاخذ بيد أولئك القراء الذين لم يسبق لهم أن رأوا متسلسلة فورييه من قبل ، فاننا نورد للايضاح الدالة (انظر الى الشكل ٣٤) :

$$x(t)=\begin{cases} t & \text{if } -\pi/2 \leqq t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{if } \pi/2 \leqq t < 3\pi/2 \end{cases}$$

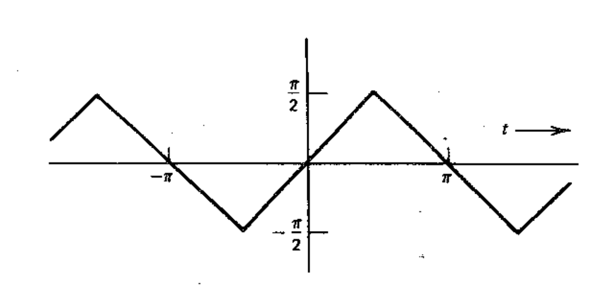
حيث نفترض أيضا أن $x(t+2\pi)=x(t)$ • نستنتج من (2) أن $a_k=0$ حيث $k=0, 1, \cdots$ ، وأنه اذا اخترنا $[-\pi/2, 3\pi/2]$ كفترة مناسبة للمكاملة ، فاننا نجد بالمكاملة بالتجزئة أن

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin kt\, dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi-t)\sin kt\, dt$$

$$=-\frac{1}{\pi k}[t\cos kt]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos kt\, dt$$

$$-\frac{1}{\pi k}[(\pi-t)\cos kt]\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}-\frac{1}{\pi k}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos kt\, dt$$

$$=\frac{4}{\pi k^2}\sin\frac{k\pi}{2}, \qquad k=1, 2, \cdots.$$



الشكل (٣٤) • بيان الدالة الدورية x ، التي دورها 2π ، والمعطاة بالمساواة $x(t)=t$ اذا كان $t\in[-\pi/2, \pi/2)$ ، وبالمساواة $x(t)=\pi-t$ اذا كان $t\in[\pi/2, 3\pi/2)$

لذا فان (1) تأخذ الشكل

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t-\frac{1}{3^2}\sin 3t+\frac{1}{5^2}\sin 5t-+\cdots\right).$$

ويمكن للقارىء رسم بيان المجاميع الجزئية الثلاثة الاولى ومقارنتها ببيان الدالة x في الشكل ٣٤ ٠

وبالعودة الى متسلسلات فوريه العامة ، فمن الممكن السؤال عن ملاءمة هذه المتسلسلات للمصطلحات التي أوردناها في البند السابق ٠ من الواضح أن دوال الجيب وجيب التمام في (1)هي حدودالمتتاليتين (u_k) و (v_k) في ٣ــ٤ــ٥، أي أن

$$u_k(t) = \cos kt, \qquad v_k(t) = \sin kt.$$

وبالتالي فمن الممكن كتابة (1) بالشكل

$$x(t) = a_0 u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(t) + b_k v_k(t)]. \tag{3}$$

لنضرب (3) بعنصر مثبت u_j ، ومن ثم نكامل بالنسبة الى t من 0 الى 2π ٠ أن هذا يعني أننا نأخذ الجداء الداخلي بـ u_j كما عرفناه في ٣ــ٤ــ٥ ٠ سنفترض أنه يسمح بالمكاملة حدا حدا (ويكفي لهذا أن يكون التقارب منتظما) ، وسنفيد من تعامد (u_k) و (v_k) ومن أن $u_j \perp v_k$ أيا كان j و k ٠ عندئذ نجد أن

$$\begin{aligned} \langle x, u_j \rangle &= a_0 \langle u_0, u_j \rangle + \sum [a_k \langle u_k, u_j \rangle + b_k \langle v_k, u_j \rangle] \\ &= a_j \langle u_j, u_j \rangle \\ &= a_j \|u_j\|^2 = \begin{cases} 2\pi a_0 & \text{if } j = 0 \\ \pi a_j & \text{if } j = 1, 2, \cdots, \end{cases} \end{aligned}$$

(راجع (5) من البند ٣ــ٤) ٠ وبصورة مماثلة ، فاذا ضربنا (3) بـ v_j وتابعنا كما في السابق ، فاننا نتوصل الى أن

$$\langle x, v_j \rangle = b_j \|v_j\|^2 = \pi b_j$$

حيث $j = 1, 2, \ldots$ ٠ فاذا حللنا بالنسبة الى a_i و b_i وأفدنا من المتتاليتين المتعامدتين المنظمتين (e_j) و $(\tilde{e}_j)$ ، حيث $e_j = \|u_j\|^{-1} u_j$ و $\tilde{e}_j = \|v_j\|^{-1} v_j$ ،

فاننا نجد التالي :

$$a_j = \frac{1}{\|u_j\|^2}\langle x, u_j\rangle = \frac{1}{\|u_j\|}\langle x, e_j\rangle,$$

(4)

$$b_j = \frac{1}{\|v_j\|^2}\langle x, v_j\rangle = \frac{1}{\|v_j\|}\langle x, \tilde{e}_j\rangle.$$

إن هذا يتطابق مع (2) ، وهو يبين أنه لدينا في (3)

$$a_k u_k(t) = \frac{1}{\|u_k\|}\langle x, e_k\rangle u_k(t) = \langle x, e_k\rangle e_k(t)$$

ونجد دستورا مماثلا لـ $b_k v_k(t)$ • وبالتالي فيمكننا كتابة متسلسلة فوريه (1) بالشـــكل

$$x = \langle x, e_0\rangle e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle x, e_k\rangle e_k + \langle x, \tilde{e}_k\rangle \tilde{e}_k]. \qquad (5)$$

وهذا يبرر تبني مصطلح « معاملات فوريه » الذي أوردناه في البند السابق •

وللانتهاء من هذا المثال ، فاننا نذكر بأنه يمكن للقارىء أن يجد مقدمة لمتسلسلات فوريه في كل من الكتب التالية :

Rogosinski, W. (1959), *Fourier Series.* 2nd ed. New York: Chelsea

Churchill, R. V. (1963), *Fourier Series and Boundary Value Problems.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Kreyszig, E. (1972), *Advanced Engineering Mathematics.* 3rd ed. New York: Wiley

ان مثالنا يتعلق بالمتسلسلات غير المنتهية ويطرح السؤال عن كيفية تعميم ما ورد فيه على متتاليات متعامدة منظمة أخرى ، وعما يمكننا قوله حول تقارب المتسلسلات المقابلة •

اذا أعطينا أي متتالية متعامدة منظمة (e_k) في فضاء هلبرت H ، فيمكن

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \qquad (6)$$

حيث α_1, α_2, … أعداد اختيارية • وبناء على التعريف الوارد في البند ٢ـ٣ ، فان مثل هذه المتسلسلة تكون متقاربة ويكون**مجموعها** s اذا وجد s من H بحيث تكون المتتالية (s_n) التي حدودها المجاميع الجزئية

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

متقاربة من s ، أي اذا كان $0 \longrightarrow \|s_n - s\|$ عندما $n \longrightarrow \infty$ •

٣ـ٥ـ٢ مبرهنة (التقارب)

لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) الشرط اللازم والكافي كي تكون المتسلسلة (6) متقاربة (بالنسبة للنظيم على H) هو أن تتقارب المتسلسلة التالية :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2. \qquad (7)$$

(ب) اذا كانت (6) متقاربة ، فان المعاملات α_k هي معاملات فورييه $\langle x, e_k\rangle$ ، حيث ترمز x الى مجموع (6) ، لذا ففي الحالة هذه يمكن كتابة (6) بالشكل

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k. \qquad (8)$$

(جـ) أيا كان x من H ، فان المتسلسلة (6) ، حيث $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$ ، تكون متقاربة (بالنسبة للنظيم المعرف على H) •

البرهــان :

(آ) لتكــن

$$s_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \qquad \text{و} \qquad \sigma_n = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2$$

عندئذ يترتب على كون (e_k) متعامدة منظمة أنه اذا كان m أي عــدد طبيعي يحقق الشرط $n > m$ فان

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \alpha_n e_n\|^2$$
$$= |\alpha_{m+1}|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

لذا فان الشرط اللازم والكافي كي تكون (s_n) متتاليــة لكوشي في H هو أن تكون (σ_n) متتالية لكوشي في $\mathbb{R}$ • وبما أن $\mathbb{R}$ تــام ، فاننا نستنتج صحــة الدعوى الاولى في المبرهنة •

(ب) اذا أخذنا الجداء الداخلي لـ s_n و e_j ، وأفدنا مــن كون (e_k) متعامدة منظمة ، فاننا نجد أن

$\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j$ عندما يكون $j = 1, \cdots, k$ ، حيث k مثبت ويحقق المتباينة $k \leqq n$

ولما كان $s_n \longrightarrow x$ فرضا ، وكان الجداء الداخلي مستمرا (راجــع التمهيدية ٣ــ٢ــ٢) فان

$$\alpha_j = \langle s_n, e_j \rangle \longrightarrow \langle x, e_j \rangle \qquad (j \leqq k).$$

يمكننا هنا أن نأخذ k (الذي يحقق الشرط $k \leqq n$) كبيرا بقــدر ما نبغى لان $n \longrightarrow \infty$ ، لذا فاننا نجد أن $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ عندما $j = 1, 2, \cdots$ •

(جـ) يترتب على متباينة بسل في المبرهنة ٣ــ٤ــ٦ أن المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

متقاربة • نستنتج من هذا ومن (آ) أن (جـ) يجب أن تكون صحيحة • ∎

اذا كانت جماعة متعامدة منظمة (e_κ) ، $\kappa \in I$ في فضاء جداء داخلي غير عدودة (نظرا لكون مجموعة الادلة I غير عدودة) ، فانه لا يزال بامكاننا تشكيل معاملات فوربيه $\langle x, e_\kappa \rangle$ لعنصر x من X ، حيث $\kappa \in I$ • فاذا أفدنا الآن من (*12) الواردة في البند ٣ـ٤ ، فاننا نستنتج أنه أيا كان العدد المثبت $m = 1, 2, \cdots$ فان عدد معاملات فورييه التي تحقق الشرط $|\langle x, e_\kappa \rangle| > 1/m$ يجب أن يكون منتهيا • وهذا يثبت صحة التمهيدية الشهيرة التالية :

٣ـ٥ـ٣ تمهيدية (معاملات فورييه)

يمكن ان يكون لكل x في فضاء جداء داخلي X مجموعة عدودة على الاكثر من معاملات فورييه غير الصفرية $\langle x, e_\kappa \rangle$ بالنسبة لجماعة متعامدة منظمة (e_κ) ، $\kappa \in I$ في X •

لذا يمكن أن نقرن بكل عنصر مثبت x من H متسلسلة مماثلة لـ (8) هي

$$\sum_{\kappa \in I} \langle x, e_\kappa \rangle e_\kappa \qquad (9)$$

كما يمكن ترتيب المتجهات e_κ المحققة للشرط $\langle x, e_\kappa \rangle \neq 0$ في متتالية $(e_1, e_2, \cdots)$ بحيث تأخذ (9) الشكل (8) • ويترتب التقارب على المبرهنة ٣ـ٥ـ٢ • وسنبين أن المجموع لا يتعلق بالترتيب الذي تتبعه في ادراج تلك العناصر e_κ في متتاليـة •

البرهـان :

لتكن (w_m) متتالية ناتجة عن تغيير ترتيب حدود المتتالية (e_n) • ان هذا يعني تعريفا وجود تطبيق متباين وغامر $n \longmapsto m(n)$ لـ $\mathbf{N}$ على $\mathbf{N}$ نفسها ، بحيث تكون الحدود المتقابلة في المتتاليتين متساوية ، أي بحيث يكون $w_{m(n)} = e_n$ لنضـع

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle, \qquad \beta_m = \langle x, w_m \rangle$$

وكذلـك

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \qquad x_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m w_m.$$

عندئذ نجد اعتمادا على الشق (ب) من المبرهنة ٣ــ٥ــ٢ أن

$$\alpha_n = \langle x, e_n\rangle = \langle x_1, e_n\rangle, \qquad \beta_m = \langle x, w_m\rangle = \langle x_2, w_m\rangle.$$

ولما كان $e_n = w_{m(n)}$ ، فاننا نجد أن

$$\langle x_1 - x_2, e_n\rangle = \langle x_1, e_n\rangle - \langle x_2, w_{m(n)}\rangle$$
$$= \langle x, e_n\rangle - \langle x, w_{m(n)}\rangle = 0$$

كما نجد بصورة مماثلة أن $\langle x_1 - x_2, w_m\rangle = 0$ • يقتضي هذا أن

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \langle x_1 - x_2, \sum \alpha_n e_n - \sum \beta_m w_m\rangle$$
$$= \sum \bar{\alpha}_n \langle x_1 - x_2, e_n\rangle - \sum \bar{\beta}_m \langle x_1 - x_2, w_m\rangle = 0.$$

لذا فان $x_1 - x_2 = 0$ ، أي أن $x_1 = x_2$ • ولما كان تغيير الترتيب لحدود المتتالية (e_n) الذي أوصلنا الى المتتالية (w_m) كيفيـا ، فاننا نكون بذلك قـد أكملنا البرهـان • ∎

مسـائل

١ ــ اذا كانت (6) متقاربـة ومجموعها x ، فأثبت أن مجموع (7) هــو $\|x\|^2$ •

٢ ــ استنبط من (1) و (2) تمثيلا لدالة $\tilde{x}$ (دالة لـ τ) دورها p اختياري بمتسلسلة فورييه •

٣ ــ بين بمثال أن ليس من الضروري بأن يكون لمتسلسلة متقاربة $\sum \langle x, e_k\rangle e_k$ المجموع x •

٤ ــ اذا كانت (x_j) متتالية في فضاء جداء داخلي X بحيث تكون المتسلسلة $\|x_1\|+\|x_2\|+\cdots$ متقاربة ، فبين أن (s_n) متتالية كوشي ، حيث $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ •

٥ ــ بين أن تقارب $\sum\|x_j\|$ في فضاء هلبرت H يقتضي تقارب $\sum x_j$ •

٦ ــ لتكن (e_j) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • بين بأنه اذا كان

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j, \qquad y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j,$$

فــان

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \bar{\beta}_j,$$

حيث المتسلسلات الاخيرة متقاربة بالاطلاق •

٧ ــ لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت H • بيــن أنه اذا كان x أي عنصر من H ، فان المتجه

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$$

يكون موجودا في H ، كما يكون $x-y$ عموديا على كل e_k •

٨ ــ لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمــة في فضــاء هلبرت H ، وليكــن $M = \text{span}(e_k)$ • بين أنه اذا كان $x \in H$ فان الشرط اللازم والكافي كــي يكون $x \in \bar{M}$ هو أن يكــون بالامكان تمثيل x بالمتسلسلة (6) حيــث المعاملات $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$ •

٩ ــ لتكن (e_n) و $(\tilde{e}_n)$ متتاليتين متعامدتين منظمتين في فضاء هلبرت H ، وليكن $M_1 = \text{span}(e_n)$ و $M_2 = \text{span}(\tilde{e}_n)$ • بين بالافادة من المسألة ٨ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$ هو أن يكون

$$(a)\quad e_n=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{nm}\tilde{e}_m, \qquad (b)\quad \tilde{e}_n=\sum_{m=1}^{\infty}\bar{\alpha}_{mn}e_m, \qquad \alpha_{nm}=\langle e_n,\tilde{e}_m\rangle.$$

١٠ـ قدم تفاصيل برهان التمهيدية ٣ـ٥ـ٣ •

٣ـ٦ المتتاليات والمجموعات المتعامدة المنظمة الكلية

ان المجموعات المتعامدة المنظمة الهامة فعلا في فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هلبرت هي تلك التي تحوي على عدد « كبير بقدر كاف » من العناصر ، بحيث يمكن أن يكون من الممكن تمثيل أي عنصر في الفضاء أو تقريبه بدقة كافية باستعمال هذه المجموعات المتعامدة المنظمة • ان الامر بسيط في الفضاءات منتهية البعد (التي بعدها n) ، اذ أن كل ما نحتاجه هو مجموعة متعامدة منظمة عدد عناصرها n • والسؤال الذي يطرح نفسه في هذا الصدد يدور حول ما يمكن فعله في حالة الفضاءات غير منتهية البعد أيضا • وسنورد فيما يلي بعض المفاهيم المتعلقة بهذا الموضوع •

٣ـ٦ـ١ تعريف (المجموعة المتعامدة المنظمة الكلية)

المجموعة الكلية (أو المجموعة الاساسية) في فضاء منظم X هي مجموعة جزئية M من X بحيث يكون span M مجموعة كثيفة في X (راجع ١ـ٣ـ٥) • كذلك ، فان المجموعة (أو المتتالية أو الجماعة) المتعامدة المنظمة في فضاء جداء داخلي X والتي تكون كلية في X تدعى **مجموعة (او متتالية أو جماعة) متعامدة منظمة كلية**(*) في X • ∎

---

* وتدعى أحيانا مجموعة متعامدة منظمة **تامة** ، بيد اننا سنقتصر على استعمال مصطلح « التمام » بالمعنى الوارد في التعريف ١ـ٤ـ٣ ، وهذا أمر نستسيغه خشية استعمال كلمة واحدة لمفهومين مختلفين تماما . [وفضلا عن ذلك ، فان بعض المؤلفين يعنون « بتمام » مجموعة متعامدة منظمة M الخاصة التي عبرنا عنها بالاقتضاء (1) الوارد في المبرهنة ٣ـ٦ـ٢ . الا اننا لن نتبنى هذا المصطلح كذلك] .

يتضح من التعريف مباشرة أن الشرط اللازم والكافي كي تكون M كلية هو أن يكون

$$\overline{\text{span}\, M} = X.$$

وتدعى الجماعة المتعامدة المنظمة في X أحيانا **قاعدة متعامدة منظمة** لـ X • بيد أنه من الاهمية بمكان ملاحظة أن هذه ليست قاعدة بالمعنى الوارد في الجبر للفضاء X باعتباره فضاء متجهيا ، الا اذا كان X منتهي البعد •

يوجد في كل فضاء لهلبرت $H \neq \{0\}$ مجموعة متعامدة منظمة كلية •

ان هذا أمر بيّن" في حال كون H منتهي البعد • أما اذا كان H غير منتهي البعد وفصولا (راجع ١ــ٣ــ٥) ، فان هذا يترتب على طريقة جرام ــ شميت بالاستقراء (العادي) • واذا كان H غير فصول ، فمن الممكن ايراد برهان انطلاقا من تمهيدية زورن ،الامر الذي سنفعله في البند٤ــ١ حيث نقدم ونشرح التمهيدية لغرض آخــر •

لكل المجموعات المتعامدة المنظمة في فضاء معطى لهلبرت $H \neq \{0\}$ عــدد كاردينالي (أصلي) واحد .يسمى هذا العدد **بعد هلبرت** أو **البعد العمودي المنظم** لـ H• (وفي حالة كون $H = \{0\}$ ، فاننا نعرف هذا البعد بأنه مساو للصفر) •

ان هذه الدعوى واضحة في حال كون H منتهي البعد ، ذلك أن بعد هلبرت عندئذ هو البعد بالمعنى الجبري • أما في حالة فضاء H فصول وغير منتهي البعد ، فان هذه الدعوى تنتج رأسا من المبرهنة ٣ــ٦ــ٤ • وفي حالة فضاء عــام H ، يتطلب البرهان أدوات أكثر تقدما من نظرية المجموعات • راجع الصفحة ٢٤٦ من الكتاب التالي :

Hewitt, E., and K. Stromberg (1969), *Real and Abstract Analysis.* Berlin: Springer

تبين المبرهنة التالية أن المجموعة المتعامدة المنظمة لا يمكن أن تظل متعامدة منظمة باضافة عناصر جديدة اليها •

٣ــ٦ــ٢ مبرهنة (الكلية)

اذا كانت M مجموعة جزئية من فضاء جداء داخلي X فاننا نجد ما يلي :

(آ) اذا كانت M كلية في X ، فلا وجود لمتجــه غير صفري x في X ، بحيث يكون x عموديا على كل عنصر من M ، وباختصار فان

$$x \perp M \implies x = 0. \tag{1}$$

(ب) اذا كان X تاما ، فان الشرط هو أيضا كاف كي تكون M كلية في X •

البرهــان :

(آ) ليكن H اتمام X (راجع ٣ــ٢ــ٣) • عندئذ يكــون X ، باعتباره فضاء جزئيا من H ، كثيفا في H • ان M مجموعة كلية في X فرضا ، لذا فــان span M كثيفة في X ، وبالتالي فهي كثيفة في H • وعندئذ تقتضي التمهيدية ٣ــ٣ــ٧ أن المتمم المعامد لـ M في H هو $\{0\}$ • ومن باب أولى ، فانه اذا كان x عنصرا من X وكان $x \perp M$ ، فان $x = 0$ •

(ب) اذا كان X فضاء هلبرت وكانت M محققة لذلك الشرط ، الامر الذي يترتب عليه أن $M^{\perp} = \{0\}$ ،فان التمهيدية ٣ــ٣ــ٧ تقتضي أن تكون M كليةفي X • ∎

ان تمام X في (ب) شرط ضروري • فاذا لم يكن X تاما ، فقد لا توجــد أية مجموعة متعامدة منظمة M في X بحيث تكون M كلية في X • وقــد أورد ديكسمييه J. Dixmier عام ١٩٥٣ م• مثالا على ذلك • راجع كذلك الصفحة ١٥٥ من كتاب بورباكي لعام ١٩٥٥ (الوارد في قائمة المراجع) •

ثمة معيار هام آخر للكلية نجده انطلاقا من متباينة بسل (راجع ٣ــ٤ــ٦)• لهذا نأخذ أي مجموعة متعامدة منظمة M في فضــاء هلبرت H • مــن المعلوم استنادا الى التمهيدية ٣ــ٥ــ٣ أنه يوجد لكل عنصر x مثبت في H جملة عدودة على الاكثر من معاملات فورييه غــير الصفرية ، لــذا فمن الممكن ترتيب هــذه المعاملات في متتالية ولتكن $\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \cdots$ • ان متباينة بسل هي (٣ــ٤ــ٦)

(متباينة بسل)

$$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqq \|x\|^2 \qquad (2)$$

حيث الطرف الايسر يمثل متسلسلة غير منتهية أو مجموعا منتهيا • واذا أخذنا اشارة التساوي ، فانها تغدو بالشكل

(علاقة بارسفال)

$$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2 \qquad (3)$$

ونجد عندئذ معيارا آخر للكلية هو :

٣ــ٦ــ٣ مبرهنة (الكليــة)

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة متعامدة منظمة M في فضاء هلبرت H كليةفي H هو أن تتحقق علاقة بارسفال (3) أيا كان x من H(يتـم الجمع وفق جميع معاملات فورييه غير الصفرية لـ x بالنسبة الى M) •

البرهـان :

(آ) اذا لم تكـن M كلية ، فانه يترتب على المبرهنة ٣ــ٦ــ٢ وجود عنصر غير صفري x في H بحيث يكون $x \perp M$ • وبما أن $x \perp M$ ، فاننا نجد في (3) أن $\langle x, e_k\rangle = 0$ أيا كان k ، وبالتالي فان الطرف الايسر من (3) يساوي الصفر ، في حين أن $\|x\|^2 \neq 0$ ، وهذا يبين أن (3) غير صحيحة • لذا فانه اذا صحت (3) أيا كان x في H ، وجب أن تكون M كلية في H •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن M كلية في H • لنأخذ أي عنصر x من H ومعاملات فورييه غير الصفرية لهذا العنصر (راجع ٣ــ٥ــ٣) التي نرتبها وفـق متتالية $\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \cdots$ ، أو نكتبها بترتيب معين اذا كان عـددها منتهيا • لنعرف الآن y بالمساواة

$$y = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k, \qquad (4)$$

مع ملاحظة أنه في حالة كون الطرف الايمن متسلسلة غير منتهية ، فان تقاربها ينتج

من المبرهنة ٣ــ٥ــ٢ • لنبين أن $x-y \perp M$ • نرى انه اذا أفدنا مــن كون e_j متتالية متعامدة منظمة ، فانه يقابل كل e_j في (4) ما يلي :

$$\langle x-y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_k \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0.$$

ونجد لكل عنصر v من M غير محتوى في (4) المساواة $\langle x, v\rangle = 0$ ، وبالتالي فــان

$$\langle x-y, v\rangle = \langle x, v\rangle - \sum_k \langle x, e_k\rangle\langle e_k, v\rangle = 0-0=0.$$

لذا فان $x-y \perp M$ ، أي أن $x-y \in M^{\perp}$ • وبما أن M كلية في H ، فاننا نجد استنادا الى ٣ــ٣ــ٧ أن $M^{\perp}=\{0\}$ • نستخلص مما تقــدم أن $x-y=0$ ، أي أن $x=y$ • واعتمادا على (4) وعلى خاصة كون e_j متعامدة منظمة ، فاننا نستنتج (3) من

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k, \sum_m \langle x, e_m\rangle e_m \right\rangle = \sum_k \langle x, e_k\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle}.$$

وبذا يكتمل البرهان • ∎

لننتقل الى فضاءات هلبرت الفصولة • يوجد لكل من هذه الفضاءات وفق التعريف ١ــ٣ــ٥ مجموعة جزئية عدودة وكثيفة في الفضاء • ان فضاءات هلبرت الفصولة أبسط من الفضاءات غير الفصولة ، ذلــك أنها لا يمكن أن تحــوي مجموعات متعامدة منظمة غير عدودة ، كما تبين المبرهنة التالية :

٣ــ٦ــ٤ مبرهنة (فضاءات هلبرت الفصولة)

ليكن H فضاء هلبرت . عندئذ نجد أنه

(آ) اذا كان H فصولا ، فان كل مجموعة متعامدة منظمة في H عدودة •

(ب) اذا حوى H متتالية متعامدة منظمة وكلية في H فان H فصول •

البرهــان :

(آ) ليكن H فصولا ، و B أي مجموعة كثيفة في H و M أي مجموعة متعامدة منظمة ، عندئذ تكون المسافة بين أي عنصرين مختلفين x و y في M مساوية $\sqrt{2}$ ذلك أن

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = 2.$$

لذا فالجواران الكرويان N_x لـ x و N_y لـ y اللذان نصف قطر كل منهما $\sqrt{2}/3$ منفصلان . ولما كانت B كثيفة في H ، فيوجد عنصــر $b \in B$ في N_x وعنصــر $\tilde{b} \in B$ في N_y بحيث $b \neq \tilde{b}$ نظرا لكون $N_x \cap N_y = \varnothing$. وبالتالي ، فاذا كانت M غير عدودة ، فاننا نجد جملة غير عدودة من الجوارات الكروية المنفصلة مثنى (حيث يقابل كل x من M أحد هذه الجوارات) ، وعندها تكون B غير عدودة . وبما أن B هي أي مجموعة كثيفة ، فان هذا يعني أن H لن يحوي مجموعة كثيفة غير عدودة ، وهذا يناقض كون H فصولا . يترتب عــلى هذا أن M لابــد أن تكــون عــدودة .

(ب) لتكن (e_k) متتالية متعامدة منظمة كليه في H ، ولتكن A مجموعة كل التراكيب الخطية

$$\gamma_1^{(n)} e_1 + \cdots + \gamma_n^{(n)} e_n \qquad\qquad n = 1, 2, \cdots$$

حيث $\gamma_k^{(n)} = a_k^{(n)} + ib_k^{(n)}$ ، بفرض $a_k^{(n)}$ و $b_k^{(n)}$ أعدادا عادية و $b_k^{(n)} = 0$ اذا كان H حقيقيا . من الواضح أن A عدودة . سنثبت أن A كثيفة في H وذلك بــأن نبين أنه يوجد لكل x من H ولكل عدد موجب ε عنصر v في A يحقق المتباينة $\|x-v\| < \varepsilon$.

بما أن المتتالية (e_k) كلية في H ، فانه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث تحوي المجموعة $Y_n = \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ نقطة بعدها عن x أصغر مــن $\varepsilon/2$. وبوجه خاص ، فاذا كان y هو المسقط العمودي لـ x على Y_n والذي يعطــى بالمساواة (راجع (8) من البند ٣ــ٤)

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

فان $\|x-y\|<\varepsilon/2$ • لذا فاننا نجد أن

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

وبما أن مجموعة الاعداد العادية كثيفة على $\mathbf{R}$ ، فانه يوجد لكل $\langle x, e_k\rangle$ عدد $\gamma_k^{(n)}$ (قسماه الحقيقي والتخيلي عاديان) بحيث يكون

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}[\langle x, e_k\rangle-\gamma_k^{(n)}]e_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

لذا فان العنصر v من A المحدد بالمساواة

$$v=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}e_k$$

يحقق ما يلي :

$$\begin{aligned}\|x-v\|&=\|x-\sum\gamma_k^{(n)}e_k\|\\&\leqq\|x-\sum\langle x, e_k\rangle e_k\|+\|\sum\langle x, e_k\rangle e_k-\sum\gamma_k^{(n)}e_k\|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

وهذا يثبت أن A كثيفة في H • وبما أن A عدودة ، فان H فصول • ∎

لاستعمال فضاءات هلبرت في البحوث التطبيقية ، علينا أن نعرف المجموعة أو المجموعات المتعامدة المنظمة الكلية الواجب اختيارها في وضع محدد ، وأن نعرف كيفية تقصي خواص عناصر مثل هذه المجموعات • وفي حالة فضاءات دوال معينة ، فان هذه المسألة ستجري دراستها في البند اللاحق الذي يحوي دوال خاصة ذات أهمية تطبيقية سبق وأن درست بتفصيل كبير • وقبل الانتهاء من هذا البند ، سنبين أن لدراستنا الحالية نتائج أبعد ذات أهمية كبيرة،ويمكن صياغتها بدلالة ايزومورفيزمات فضاءات هلبرت • لهذا سنعيد الى الذاكرة أولا التعريف التالي الذي ورد في البند ٣ـ٢ :

الايزومورفيزم لفضاء هلبرت H على فضاء هلبرت $\bar{H}$ ، حيث الفضاءان معرفان على حقل واحد ، هو مؤثر خطي متباين وغامر $T: H \longrightarrow \bar{H}$ يحقق الشرط

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{5}$$

أيا كان x و y من H • يدعى H و $\bar{H}$ عندئذ **فضاءين ايزومورفيين** • وبما أن T خطي ، فانه يحفظ بنيـة الفضاء المتجهي ، وتبين المساواة (5) أن T تطبيق ايزومتري • يترتب على هذا وعلى كون T متباينا وغامرا أنه لا يمكن التمييز بين H و $\bar{H}$ من وجهتي النظر الجبرية والمترية ، إذ إنهما في الحقيقة فضاء واحد ، اللهم باستثناء طبيعة عناصرهما ، وهذا يسمح لنا بالنظر الى $\bar{H}$ على أنه في جوهره H الذي نضع اشارة فوق كل من متجهاته • أو أنه يمكننا أن نعد H ، $\bar{H}$ نسختين (أنموذجين) لفضاء مجرد واحد ، الامر الذي غالبا ما نفعله في حالة الفضاءات الاقليدية التي بعدها n •

ان أكثر الحقائق اثارة في هذه المناقشة تكمن في أنه يوجد لكل بعد لهلبرت (راجع بداية هذا البند) فضاء مجرد واحد على الضبط لهلبرت وحقيقي،وفضاء مجرد واحد على الضبط لهلبرت وعقدي • وبعبارة أخرى ، فانه يمكن التمييز بين فضاءين مجردين لهلبرت على حقل واحد عن طريق بعد هلبرت لكل منهما فقط ؛ وهذا تعميم للتمييز بين الفضاءات الاقليدية ، وهذا ما تعنيه المبرهنة التالية :

٣ـ٦ـ٥ مبرهنة (الايزومورفيزم وبعد هلبرت)

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاءا هلبرت H و $\bar{H}$ الحقيقيان معا أو العقديان معا ايزومورفيين ، هو أن يكون بعد هلبرت لـ H مساويا بعد هلبرت لـ $\bar{H}$ •

البرهان :

(آ) اذا كان H ايزومورفيا مع $\bar{H}$ وكان $T: H \longrightarrow \bar{H}$ ايزومورفيزما ، فان (5) تبين أن للعناصر المتعامدة المنظمة في H صورا متعامدة ومنظمة وفق

T • وبما أن T متباين وغامر ، فاننـــا نستنتج أن صورة كـــل مجموعة متعامدة منظمة كلية في H وفق T هي مجموعة متعامدة منظمة كلية في $\tilde{H}$ • لذا فان بعد هلبرت للفضاء H يساوي بعد هلبرت للفضاء $\tilde{H}$ •

(ب) وبالعكس ، لنفترض أن بعد هلبرت للفضاء H يساوي بعد هلبرت للفضاء $\tilde{H}$ • ان الحالة التي يكون فيها $H=\{0\}$ و $\tilde{H}=\{0\}$ تافهـــة • لذلـــك سنفترض أن $H\neq\{0\}$ • عندئذ يكون $\tilde{H}\neq\{0\}$ ، كمـــا يكون لاي مجموعتين متعامدتين منظمتين كليتين M في H و $\tilde{M}$ في $\tilde{H}$ عدد كاردينالي واحد • لـــذا فمن الممكن تذييل هاتين المجموعتين باستعمال مجموعة أدلـــة واحـــدة $\{k\}$ ، وبالتالي فاننا نكتب $M=(e_k)$ و $\tilde{M}=(\tilde{e}_k)$ •

لاثبـــات أن H و $\tilde{H}$ ايزومورفيان ، سننشىء ايزومورفيزما لـ H على $\tilde{H}$ • فاذا كان $x\in H$ ، نجد أن

$$x=\sum_k \langle x, e_k\rangle e_k \tag{6}$$

حيث الطرف الايمن مجموع منته أو متسلسلة غير منتهية (٣ـــ٥ـــ٣) ، وحيث $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2<\infty$ استنادا الى متباينة بسل • فاذا عرفنا

$$\tilde{x}=Tx=\sum_k \langle x, e_k\rangle \tilde{e}_k \tag{7}$$

فاننا نستنتج التقارب وفق ٣ـــ٥ـــ٢ ، وبالتالي فان $\tilde{x}\in\tilde{H}$ • ان المؤثر T خطي نظرا لكون الجداء الداخلي خطيـــا بالنسبة للعامـــل الاول • كذلك ، فـــان T ايزومتري ، ذلك أنه اذا استعملنا أولا (7) ومن ثم (6) فاننا نجد التالي :

$$\|\tilde{x}\|^2=\|Tx\|^2=\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2=\|x\|^2.$$

يترتب على هذا وعلـــى (9) و (10) في البنـــد ٣ـــ١ أن T تحفظ الجـــداء الداخلي • وفضلا عن ذلك فان الايزومترية تقتضي التباين ، ذلك أنـــه اذا كان $Tx=Ty$ فـــان

$$\|x-y\|=\|T(x-y)\|=\|Tx-Ty\|=0,$$

وبالتالي فان $x=y$ و T متباين وفق ٢ـ٦ـ١٠ •

سنبين أخيرا أن T غامر • اذا كان

$$\tilde{x}=\sum_k \alpha_k \tilde{e}_k$$

عنصرا في $\tilde{H}$ ، فانه يترتب على متباينة بسل أن $\sum|\alpha_k|^2<\infty$ • وبالتالي فان

$$\sum_k \alpha_k e_k$$

مجموع منته أو متسلسلة تتقارب من عنصر x من H وفق ٣ـ٥ـ٢ ، كما يكون $\alpha_k=\langle x, e_k\rangle$ استنادا الى المبرهنة نفسها • لذا فاننا نجد أن $\tilde{x}=Tx$ وفق (7) • ولما كان $\tilde{x}\in\tilde{H}$ اختياريا ، فان هذا يثبت أن T غامر •∎

مسائل

١ ــ اذا كانت F قاعدة متعامدة منظمة في فضاء جداء داخلي X ، فهل يمكن تمثيل كل x من X على شكل تركيب خطي من عناصر في F ؟ (يتألف التركيب الخطي تعريفا من عدد منته من الحدود) •

٢ ــ أثبت أنه اذا كان البعد العمودي لفضاء هلبرت منتهيا ، فانه يساوي بعد H باعتباره فضاء متجهيا ، وبالعكس ، فاذا كان الفضاء H منتهيا فبين أن الفضاء السابق يكون كذلك •

٣ ــ ما هي المبرهنة من الهندسة الابتدائية التي نستنتج منها (3) في حالة فضاء اقليدي بعده n ؟

٤ ــ استنتج من (3) الدستور التالي (الذي غالبا ما يطلق عليه اسم **علاقة بارسفال**) :

$$\langle x, y\rangle=\sum_k \langle x, e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle}.$$

٥ ــ بين أن الشرط اللازم والكافي كـي تكون الجماعـة المتعامدة المنظمـة $(e_\kappa), \kappa \in I$ في فضاء هلبرت H كلية هو أن تتحقق العلاقة الواردة فـي المسألة ٤ أيا كان x و y في H •

٦ ــ ليكن فضاء هلبرت H فصولا و M مجموعة جزئية كثيفة وعدودة في H • أثبت أن H تحوي متتالية متعامدة منظمة كلية يمكن الحصول عليها مـن M بطريقة جرام ــ شميت •

٧ ــ بين أنه اذا كان فضاء هلبرت H فصولا ، فمن الممكن اثبات وجود مجموعة متعامدة منظمة كلية في H دون اللجوء الى تمهيد زورن •

٨ ــ اذا كانت F أي متتالية متعامدة منظمـة في فضـاء هلبرت H الفصول ، فأثبت وجود متتالية متعامدة منظمة كلية $\tilde{F}$ تحوي F •

٩ ــ لتكن M مجموعة كلية في فضاء جداء داخلي X • فاذا كان $\langle v, x\rangle = \langle w, x\rangle$ أيا كان x من M، فأثبت أن $v = w$ •

١٠ــ لتكن M مجموعة جزئية من فضاء هلبرت H ، وليكن $v, w \in H$ • لنفترض أن المساواة $\langle v, x\rangle = \langle w, x\rangle$ الصحيحة أيا كان x من M تقتضي المساواة $v = w$ • بَيِّنْ أنه اذا تحقق هذا أيا كان v, w من H فان M كلية في H •

٣ــ٧ حدوديات لاكير وهرميت ولوجاندر

لنظرية فضاءات هلبرت تطبيقات في مواضيع مختلفة ومتطورة في التحليل الرياضي • وسنناقش في البنـد الحالي بعض المتتاليات المتعامدة الكلية وبعض المتتاليات المتعامدة المنظمـة الكليـة ، والتي كثيرا ما يرد استعمالها في سياق بعض المسائل العملية (في ميكانيكا الكم مثلا ، كما سنرى في الفصل ١١) • وقد درست خواص هذه المتتاليات بتفصيل كبير ، ويمثل الكتاب التالي مرجعـا جيدا في هذا الموضوع :

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953–55), *Higher Transcendental Functions.* 3 vols. New York: McGraw-Hill

هذا البند اختياري •

٣ـ٧ـ١ حدوديات لوجاندر

ان فضاء الجداء الداخلي X المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على $[-1,1]$ حيث الجداء الداخلي يعرف بالمساواة

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$$

يمكن اتمامه طبقا للبرهنة ٣ـ٢ـ٣ • عندئذ نجد فضاء هلبرت الذي نرمز له بـ $L^2[-1,1]$ • راجع أيضا المثال ٣ـ١ـ٥ •

ان هدفنا هو الحصول على متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2[-1,1]$ مؤلفة من دوال يسهل التعامل معها • وتمثل الحدوديات دوال هذا النمط • سننطلق من دوال القوة $x_0,\ x_1,\ x_2 \ldots$ حيث

$$(1)\qquad x_0(t)=1,\qquad x_1(t)=t,\quad \cdots,\qquad x_j(t)=t^j,\cdots\qquad t\in[-1,1].$$

انهذه المتتالية مستقلة خطيا (أورد البرهان !) • وبتطبيق طريقة جرام ـ شميت (البند ٣ـ٤) ، نجد متتالية متعامدة منظمة (e_n) • كل e_n هو حدودي ، ذلك أننا نستعمل تركيبا خطيا للدوال x_j • ودرجة e_n هي n كما سنرى ان (e_n) كلية في $L^2[-1,1]$ •

البرهان :

ان المجموعة $W=A(X)$ كثيفة في $L^2[-1,1]$ اعتمادا على المبرهنة ٣ـ٢ـ٣ • لذا فانه يقابل كل عنصر مثبت x من $L^2[-1,1]$ وكل عدد موجب ε دالة مستمرة y معرفة على $[-1,1]$ بحيث أن

$$\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ويقابل y هذه حدودي z بحيث تتحقق المتباينة

$$|y(t)-z(t)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

أيا كان t من $[-1,1]$ ، ان هذا ناتج من مبرهنة ڤير شتراس في التقريب التي سنثبتها في البند ٤ــ١١ ، ويترتب على هذا أن

$$\|y-z\|^2=\int_{-1}^{1}|y(t)-z(t)|^2\,dt<2\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

وبالتالي فاننا نجد اعتمادا على متباينة المثلث أنْ

$$\|x-z\|\leqq\|x-y\|+\|y-z\|<\varepsilon.$$

ويبين تعريف طريقة جرام ــ شميت أن (1) يقتضي وجود عنصر $z\in\operatorname{span}\{e_0,\cdots,e_m\}$ عندما يكون m كبيرا بقدر كاف ، ولما كان العنصر $x\in L^2[-1,1]$ والعدد الموجب ε كيفيين ، فاننا نستنتج كلية (e_n) ، ∎

هذا ويحتاج المرء لاغراض عملية دساتير ظاهرة ، لذا ندعي بأن

$$e_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(t)\qquad n=0,1,\cdots \tag{2a}$$

حيث

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]. \tag{2b}$$

يدعى P_n **حدودي لوجاندر من المرتبة n** ، ويسمى الدستور (2b) **دستور رودريك** ، ومن نتائج الجذر التربيعي في الدستور (2a) الحصول على الخاصة $P_n(1)=1$ التي لن نتوقف عند اثباتها نظرا لعدم حاجتنا اليها ،

اذا طبقنا مبرهنة ثنائي الحد على $(t^2-1)^n$ واشتققنا النتيجة n من المرات حدا حدا ، فاننا نجد من (2b) أن

$$P_n(t)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{(2n-2j)!}{2^n j!\,(n-j)!\,(n-2j)!}\,t^{n-2j} \tag{2c}$$

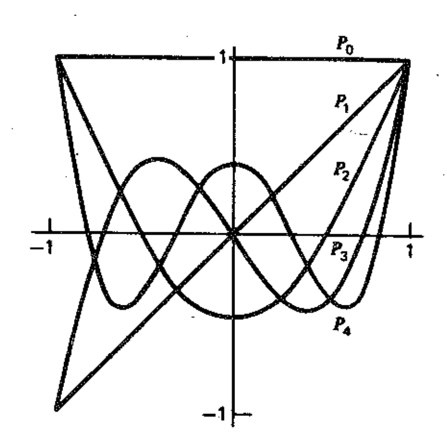
حيث $N=n/2$ اذا كان n زوجيا و $N=(n-1)/2$ اذا كان فرديا • لذا فان (راجع الشكل ٣٥)

$$P_0(t)=1 \qquad P_1(t)=t$$

$$P_2(t)=\tfrac{1}{2}(3t^2-1) \qquad P_3(t)=\tfrac{1}{2}(5t^3-3t) \tag{2*}$$

$$P_4(t)=\tfrac{1}{8}(35t^4-30t^2+3) \qquad P_5(t)=\tfrac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t)$$

وهلم جرًا •



الشكل (٣٥) • حدوديات لوجاندر

برهان (2a) **و** (2b) • سنبين في (آ) أن (2b) تقتضي

$$\|P_n\|=\left[\int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt\right]^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{2n+1}} \tag{3}$$

وبالتالي فان نظيم e_n في (2a) يغدو 1 • أما في الشق (ب) فسنثبت أن (P_n) متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[-1,1]$ • وهذا يكفي لاثبات (2a) و (2b) للسبب التالي : سنرمز للطرف الايمن من (2a) أولا بـ $y_n(t)$ • عندئذ يكـون y_n حدوديا درجته n ، ويقتضي الشقان (آ) و (ب) أن (y_n) متتالية متعامدة منظمة في $L^2[-1,1]$ • ليكـن

$$Y_n=\operatorname{span}\{e_0,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_0,\cdots,x_n\}=\operatorname{span}\{y_0,\cdots,y_n\};$$

ان اشارة المساواة الثانيـــة هنا ناتجة من دستور طريقة جرام ــ شميت ، واشارة المساواة الاخيرة ناتجة من $\dim Y_n = n+1$ والاستقلال الخطـــي لـ $\{y_0, \cdots, y_n\}$ الذي نَصَصْنا عليه في ٣ــ٤ــ٢ • لذا فانه يوجد لـ y_n التمثيل

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j e_j. \tag{4}$$

واستنادا الى التعامد ، فان

$$y_n \perp Y_{n-1} = \text{span}\{y_0, \cdots, y_{n-1}\} = \text{span}\{e_0, \cdots, e_{n-1}\}.$$

ان هذا يقتضي أنه اذا كانت $k = 0, \cdots, n-1$ فان

$$0 = \langle y_n, e_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k.$$

وبالتالي فان (4) تؤول الى المساواة $y_n = \alpha_n e_n$ • ان $|\alpha_n| = 1$ هنا ، ذلـــك أن $\|y_n\| = \|e_n\| = 1$ • وفعلا فـــان $\alpha_n = +1$ أو -1 α_n نظـــرا لان y_n و e_n حقيقيان كلاهما • ان $y_n(t) > 0$ عندما تأخذ t قيما كبيرة بقدر كاف ، ذلك أن معامل t^n في (2c) موجب • كذلك فـــان $e_n(t) > 0$ عندما تأخـــذ t قيما كبيرة بقدر كاف ، الامر الذي يمكن رؤيته من $x_n(t) = t^n$ ومن (13) و (14) في البند ٣ــ٤ • لذا فان $\alpha = +1$ و $y_n = e_n$ ، وهذا يثبت (2a) ، حيـــث P_n معطـــاة بـ (2b) •

يبين هذا كله أنه بعد ايراد هذه المقدمة ، فان البرهان سيكون كاملا •

(آ) سنستنتج (3) من (2b) ؛ لذا نكتب $u = t^2 - 1$ • ان الدالة u^n ومشتقاتها $(u^n), \cdots, (u^n)^{(n-1)}$ اصفار عندما $t = \pm 1$ ، كما أن $(u^n)^{(2n)} = (2n)!$ • وباجراء المكاملة n مرة بالتجزئة ، فاننا نجد من (2b) أن

$$(2^n n!)^2 \|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n)} (u^n)^{(n)}\, dt$$

$$= (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n)} \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-1)} (u^n)^{(n+1)}\, dt$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} u^n \, dt$$

$$= 2(2n)! \int_{0}^{1} (1-t^2)^n \, dt$$

$$= 2(2n)! \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} \tau \, d\tau \qquad (t = \sin \tau)$$

$$= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.$$

فاذا قسمنا الطرفين على $(2^n n!)^2$ ، فاننا نجد (3) •

(ب) سنبين أن $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ ، حيث $0 \leqq m < n$ • بما أن P_m حدودي ، فانه يكفي إثبات $\langle x_m, P_n \rangle = 0$ عندما $m < n$ حيث x_m معين بـ (1) ، وهذا ينتج باجراء المكاملة بالتجزئة m مرة كما يلي :

$$2^n n! \langle x_m, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} t^m (u^n)^{(n)} \, dt$$

$$= t^m (u^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^{1} - m \int_{-1}^{1} t^{m-1} (u^n)^{(n-1)} \, dt$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^m m! \int_{-1}^{1} (u^n)^{(n-m)} \, dt$$

$$= (-1)^m m! \, (u^n)^{(n-m-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0.$$

وبهذا يكتمل برهان (2a) و (2b) • ∎

وتشكل حدوديات لوجاندر حلولا **لمعادلة لوجاندر التفاضلية** الهامة التالية

$$(1-t^2) P_n'' - 2t P_n' + n(n+1) P_n = 0, \qquad \textbf{(5)}$$

ويمكن الحصول على (2c) أيضا بتطبيق طريقة متسلسلات القوى على (5)

وفضلا عن ذلك ، فان (q_n) حيث

$$(6) \qquad q_n = \frac{1}{\|p_n\|} p_n, \qquad p_n(t) = P_n(s), \qquad s = 1 + 2\frac{t-b}{b-a}.$$

تشكل متتالية متعامدة منظمة كلية في الفضاء $L^2[a, b]$ • ونجد اثباتا لهذا اذا لاحظنا أن $a \leqq t \leqq b$ توافق $-1 \leqq s \leqq 1$ ، وأن التعامد يحتفظ وفق هذا التحويل الخطي $t \longmapsto s$ •

وهكذا فاننا نجد متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2[a, b]$ أيا كانت الفترة المتراصة $[a, b]$ • لهذا فان المبرهنة ٣ـ٦ـ٤ تقتضي التالي :

الفضاء الحقيقي $L^2[a, b]$ فصول •

٣ـ٧ـ٢ حدوديات هرميت

هنالك فضاءات أخرى ذات أهمية عملية هي $L^2(-\infty, +\infty)$ و $L^2[a, +\infty)$ و $L^2(-\infty, b]$ ، وهي فضاءات لم تتطرق اليها في ٣ـ٧ـ١ • بما أن فترات المكاملة غير منتهية ، فان القوى $x_0, x_1, \ldots$ في ٣ـ٧ـ١ وحدها لن تساعدنا في شيء • الا أننا لو ضربنا كلا منها بدالة بسيطة تتناقص بسرعة كافية ، فيمكننا أن نأمل في الحصول على تكاملات منتهية • والدوال الاسية بأس مناسب تمثل اختيارا مناسبا لهذه الدوال •

لنأخذ الفضاء الحقيقي $L^2(-\infty, +\infty)$ ، ولنعين الجداء الداخلي بالدستور

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\, dt.$$

سنطبق طريقة جرام ـ شميت على متتالية الدوال المعرفة كما يلي :

$$w(t) = e^{-t^2/2}, \qquad tw(t), \qquad t^2 w(t), \cdots .$$

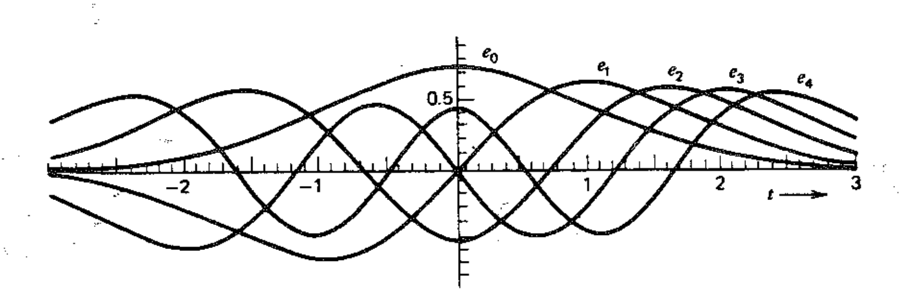
ان العامل $1/2$ الوارد في الأس اصطلاحي تماما ، وليس له معنى أعمق •

هذه الدوال هي عناصر في $L^2(-\infty, +\infty)$ ، ذلك أنهـا محدودة على **R** ، ولنفترض مثلا أن $|t^n w(t)| \leqq k_n$ أيا كان t ، لذا فان

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2/2}\, t^n e^{-t^2/2}\, dt\right| \leqq k_{m+n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = k_{m+n}\sqrt{2\pi}.$$

ان طريقة جرام ـ شميت تعطي متتاليـة متعامدة منظمـة (e_n) حيـث (الشـكل ٣٦)

$$e_n(t) = \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}}\, e^{-t^2/2}\, H_n(t) \tag{7a}$$



الشكل (٣٦) • الدوال e_n في (7a) الحاوية على حدوديات هرميت

وحيـث

$$H_0(t) = 1, \qquad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}) \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{7b}$$

يسمى H_n **حدودي هرميت من المرتبة** n •

وباجراء الاشتقاقات التي أشرنا اليها في (7b) نجد أن

$$H_n(t) = n! \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!\,(n-2j)!}\, t^{n-2j} \tag{7c}$$

حيث $N = n/2$ اذا كان n زوجيا و $N = (n-1)/2$ اذا كان n فرديا . لاحظ أن يمكن أيضا كتابة هذه المساواة بالشكل

$$H_n(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}. \tag{7c'}$$

ونورد فيما يلي الصيغ الظاهرة لحدوديات هرميت القليلة الاولى :

$$\begin{aligned} &H_0(t) = 1 && H_1(t) = 2t \\ &H_2(t) = 4t^2 - 2 && H_3(t) = 8t^3 - 12t \\ &H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12 && H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t. \end{aligned} \tag{7*}$$

ان المتتالية (e_n) المعرفة ب (7a) و (7b) متعامدة منظمة .

البرهـان :

يبين (7a) و (7b) أنه علينا اثبات أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{if } m = n. \end{cases} \tag{8}$$

ونجد باشتقاق (7c') عندما $n \geqq 1$ أن

$$\begin{aligned} H_n'(t) &= 2n \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j}{j!} (n-1)(n-2)\cdots(n-2j)(2t)^{n-1-2j} \\ &= 2nH_{n-1}(t) \end{aligned}$$

حيث $M = (n-2)/2$ اذا كان n زوجيا و $M = (n-1)/2$ اذا كان n فرديا . سنطبق هذا الدستور على H_m ، ونفترض أن $m \leqq n$ ، ونرمز للدالة الأسية في (8) بـ v بقصد التبسيط ، ونجري المكاملة m مرة بالتجزئة . عندئذ نجد اعتمادا على (7b) أن

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(t)H_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t)v^{(n)}\,dt$$

$$= H_m(t)v^{(n-1)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2mH_{m-1}(t)v^{(n-1)}\,dt$$

$$= -2m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(t)v^{(n-1)}\,dt$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^m 2^m m! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t)v^{(n-m)}\,dt.$$

وهنا $H_0(t) = 1$ • واذا كان $m < n$ ، فاننا اذا أجرينا المكاملة مرة أخرى ، نجـد 0 ، ذلك أن v ومشتقاتها تقترب من الصفر عندما $t \longrightarrow +\infty$ أو عندما $t \longrightarrow -\infty$ • وهذا يثبت تعامد (e_n) • سنثبت صحة (8) عندما $m = n$ الامـر الذي يترتب عليه أن $\|e_n\| = 1$ وفق (7a) • اذا كان $m = n$ ، ورمزنا للتكامل الاخير بـ J ، فاننـا نجـد

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

وهذه نتيجة معروفة • وللتحقق منها ، نأخذ J^2 ونستخدم الاحداثيين القطبيين r ، θ والمساواة $ds\,dt = r\,dr\,d\theta$ فنجـد

$$J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s^2+t^2)}\,ds\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} = \pi.$$

لذا فان الدستور (8) صحيح ، الامر الذي يقتضي كون (e_n) متعامدة منظمة •∎

وغالبا ما يعبر عن (8) بالعبارة التقليدية القائلة بأن الحدوديات H_n تشكل متتالية متعامدة بالنسبة الى **دالة الوزن** w^2 ، حيث w دالة عرفناها في البداية .

يمكننا إثبات ان المتتالية (e_n) المعرفة ب (7a) و (7b) كلية في الفضاء الحقيقي $L^2(-\infty, +\infty)$. لذا فان هذا الفضاء فصول (راجع ٣ـ٦ـ٤) .

لنذكر أخيرا أن حدوديات هرميت H_n تحقق **معادلة هرميت التفاضلية**

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0. \qquad (9)$$

تحذير : من سوء الحظ ألا تكون المصطلحات في الكتب المختلفة موحدة. وفي الحقيقة ، فان الدوال He_n المعرفة كالتالي

$$He_0(t) = 1, \qquad He_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2/2}) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

تسمى أيضا « حدوديات هرميت » ، والأسوء من ذلك ، فانه يشار اليها أحيانا بـ H_n .

سنورد تطبيقا لحدوديات هرميت في ميكانيكا الكم في البند ١١ـ٣ .

٣ـ٧ـ٣ حدوديات لاكير

من الممكن الحصول على متتالية متعامدة منظمة كلية في $L^2(-\infty, b]$ أو في $L^2[a, +\infty)$ من متتالية من هـذا النوع في $L^2[0, +\infty)$ بالتحويلين $t = b - s$ و $t = s + a$ عـلى الترتيب .

لنأخذ $L^2[0, +\infty)$. اذا طبقنا طريقة جرام ـ شميت على المتتالية المعرفة كالتـالي

$$e^{-t/2}, \qquad te^{-t/2}, \qquad t^2 e^{-t/2}, \qquad \cdots$$

فاننا نجد متتالية متعامدة منظمة (e_n) . من الممكن اثبات أن (e_n) كليـة في

$L^2[0, +\infty)$ وانها تعطى بالدستور (الشكل ٣٧)

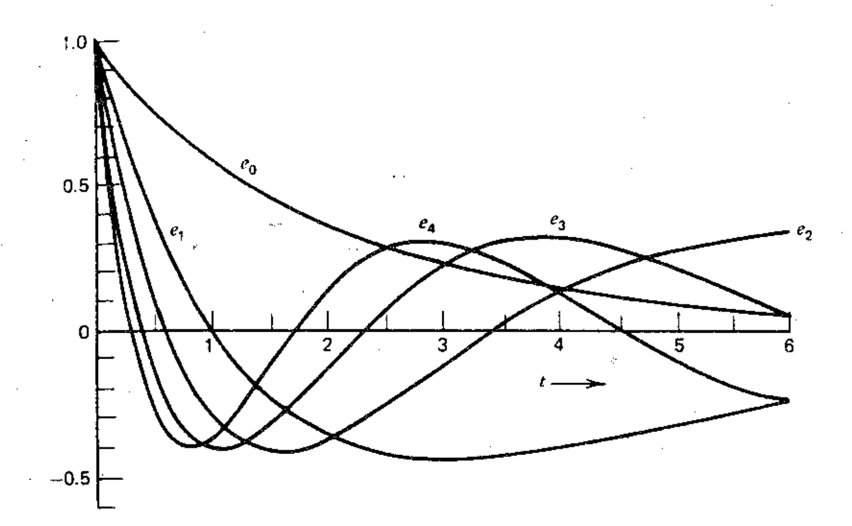
$$e_n(t) = e^{-t/2} L_n(t) \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{10a}$$

حيث يعرف حدودي لاكير من المرتبة n كما يلي

$$L_0(t) = 1, \qquad L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{10b}$$

أي أن

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} t^j. \tag{10c}$$



الشكل (٣٧) ـ الدوال e_n في (10a) الحاوية على حدوديات لاكير

ونورد فيما يلي الصيغ الظاهرة لعدد قليل من حدوديات لاكير الاولى

$$L_0(t) = 1 \qquad L_1(t) = 1 - t$$

$$L_2(t) = 1 - 2t + \tfrac{1}{2}t^2 \qquad L_3(t) = 1 - 3t + \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{1}{6}t^3 \tag{10*}$$

$$L_4(t) = 1 - 4t + 3t^2 - \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4.$$

وتشكل حدوديات لاكير L_n حلولا لمعادلة لاكير التفاضلية

$$tL_n'' + (1-t)L_n' + nL_n = 0. \quad (11)$$

ولمزيد من التفاصيل ، على القارىء أن يعود الى الكتابين التاليين الموجودين في مسرد المراجع :

Courant, R., and D. Hilbert (1953–62), *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. New York: Interscience/Wiley

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953–55), *Higher Transcendental Functions*. 3 vols. New York: McGraw-Hill

مسائل

١ ــ بين بأنه يمكن كتابة معادلة لوجاندر التفاضلية بالشكل

$$[(1-t^2)P_n']' = -n(n+1)P_n.$$

اضرب المعادلة بـ P_m ، اضرب المعادلة الموافقة لـ P_m بـ $-P_n$ ، ثم اجمع المعادلتين ، بين بمكاملة المعادلة الناتجة من -1 الى 1 أن (P_n) متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[-1, 1]$.

٢ ــ استنتج (2c) من (2b) .

٣ ــ **(الدالة المولدة)** . بين بأن

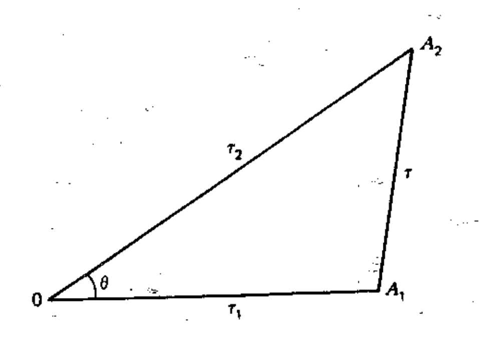
$$\frac{1}{\sqrt{1-2tw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n.$$

تدعى الدالة في الطرف الايسر **الدالة المولدة** لحدوديات لوجاندر . ان الدوال المولدة مفيدة فيما يتعلق بدوال خاصة متنوعة ، راجع الكتابين اللذين أوردناهما مباشرة قبل هذه المسائل .

٤ ــ بين بأن

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}}=\frac{1}{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

حيث r هي المسافة بين نقطتين A_1 و A_2 في $\mathbf{R}^3$ كما هو مبين في الشكل ٣٨ و $r_2>0$ • (ان هذا الدستور مفيد في نظرية الكمون) •



الشكل (٣٨) • المسألة ٤

٥ ــ أوجد حدوديات لوجاندر باستخدام طريقة متسلسلات القوى على النحو التالي : عوض $x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$ في معادلة لوجاندر ، وبين أنه بتعييننا للمعاملات ، فاننا نجد الحل $x=c_0x_1+c_1x_2$ حيث

$$x_1(t)=1-\frac{n(n+1)}{2!}t^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}t^4-+\cdots$$

وحيث

$$x_2=t-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}t^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}t^5-+\cdots.$$

بين أنه اذا كان n عددا صحيحا موجبا ، فان احدى هاتين الدالتين تؤول الى حدودي ، وهذا الحدودي يغدو P_n اذا اخترنا $c_n=(2n)!/2^n(n!)^2$ معاملا لـ t^n •

٦ ـ **(الدالة المولدة)** • بين بأن

$$\exp(2wt - w^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(t) w^n.$$

تدعى الدالة في الطرف الايسر **الدالة المولدة** لحدوديات هرميت •

٧ ـ بين باستعمال (7b) أن

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t).$$

٨ ـ بين باشتقاق الدالة المولدة في المسألة ٦ بالنسبة الى t أن

$$H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t) \qquad (n \geqq 1)$$

ثم بين باستعمال المسألة ٧ أن H_n يحقق معادلة هرميت التفاضلية •

٩ ـ حل المعادلة التفاضلية $y''+(2n+1-t^2)y=0$ بدلالة حدوديات هرميت •

١٠ـ بين باستعمال المسألة ٨ أن

$$(e^{-t^2}H_n')' = -2ne^{-t^2}H_n.$$

بين بالافادة من هذا ومن الطريقة المشروحة في المسألة الاولى أن الدوال المعرفة بـ (7a) متعامدة مع R •

١١ـ **(الدالة المولدة)** • بين باستعمال (10c) أن

$$\psi(t, w) = \frac{1}{1-w} \exp\left[-\frac{tw}{1-w}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) w^n.$$

١٢ـ بين باشتقاق ψ في المسألة ١١ بالنسبة الى w أن

$$\text{(a)} \qquad (n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1-t)L_n(t) + nL_{n-1}(t) = 0.$$

ثم بين باشتقاق ψ بالنسبة الى t أن

$$L_{n-1}(t) = L'_{n-1}(t) - L'_n(t). \qquad \text{(b)}$$

١٣ــ أثبت باستعمال المسألة ١٢ أن

$$tL'_n(t) = nL_n(t) - nL_{n-1}(t). \qquad \text{(c)}$$

بين بالافادة من هذا ومن (b) في المسألة ١٢ أن L_n تحقق معادلة لاكير التفاضليــة (11) •

١٤ــ بين أن لكل من الدوال الواردة في (10a) النظيم 1 •

١٥ــ بين بأن الدوال في (10a) تشكل متتالية متعامدة في الفضاء $L^2[0, +\infty)$.

٣ــ٨ تمثيل الداليات على فضاءات هلبرت

ان معرفة الصيغة العامة للداليات الخطية المحدودة على فضاءات متنوعة أمر هام من الوجهة العملية ، وقد سبق أن أشرنا الى هذا الموضوع وشرحناه في البند ٢ــ١٠ • أما في فضاءات باناخ العامة ، فان الدساتير وطرق الحصول عليها تكون أحيانا معقدة • بيد أن الوضع يكون أسهل بدرجة كبيرة في فضاء هلبرت ، كما تبين المبرهنة التالية :

٣ــ٨ــ١ مبرهنة ريس (الداليات على فضاءات هلبرت)

يمكن تمثيل كل دالي خطي محدود f على فضاء هلبرت H بدلالة الجداء الداخلي على النحو التالي

$$f(x) = \langle x, z \rangle \qquad (1)$$

حيث z تابع لـ f ، ويتعين بصورة وحيدة بـ f ونظيمه هو

$$\|z\| = \|f\|. \qquad (2)$$

البرهـــان

سنثبت مايلي :

(آ) للدالي f التمثيل (1)

(ب) z الوارد في (1) وحيد

(جـ) الدستور (2) صحيح

أما التفاصيل فهي كما يلي :

(آ) اذا كان $f=0$ فان (1) و (2) صحيحان اذا أخذنا $z=0$ ٠لنفترض الآن أن $f\neq 0$ ٠ لشرح فكرة البرهان ، سنطرح السؤال حول الخواص التـــي يجب أن يتمتع بها z اذا وجد التمثيل (1) ٠ نلاحظ أولا أن $z\neq 0$ ، لانه اذا لم يتحقق ذلك لكان $f=0$ ٠ ثانيا ، ان $\langle x, z\rangle=0$ أيا كان x التي تحقق الشرط $f(x)=0$ ، أي أيا كان x من الفضاء الصفري $\mathcal{N}(f)$ لـ f ٠ لذا فان $z\perp\mathcal{N}(f)$ ٠ ان هذا يوحي الينا بأخذ $\mathcal{N}(f)$ ومتممه المعامد $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ ٠

ان $\mathcal{N}(f)$ فضاء متجهي وفق ٢ـ٦ـ٩ وهو مغلق استنادا الى ٢ـ٧ـ١٠ ٠ كذلك ، فان كون $f\neq 0$ يقتضي أن يكون $\mathcal{N}(f)\neq H$ ، وبالتالي فانه يترتب على مبرهنة الاسقاط ٣ـ٣ـ٤ أن $\mathcal{N}(f)^{\perp}\neq\{0\}$ ٠ لـــذا فان $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ يحوي عنصـــرا $z_0\neq 0$ ٠ سنضع

$$v=f(x)z_0-f(z_0)x$$

حيث x عنصر اختياري من H ٠ وبتطبيق f نجد

$$f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0.$$

وهذا يبين أن $v\in\mathcal{N}(f)$ ٠ ولما كان $z_0\perp\mathcal{N}(f)$ ، فان

$$\begin{aligned}0=\langle v, z_0\rangle&=\langle f(x)z_0-f(z_0)x, z_0\rangle\\&=f(x)\langle z_0, z_0\rangle-f(z_0)\langle x, z_0\rangle.\end{aligned}$$

وبملاحظة أن $\langle z_0, z_0\rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$ ، فمن الممكن حل هذه المعادلة بالنسبة الى $f(x)$ ونجـد

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle} \langle x, z_0\rangle.$$

يمكن كتابة هذا بالصيغة (1) ، حيث

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0\rangle} z_0.$$

وبما أن x عنصر اختياري من H ، فاننا نكون قد أثبتنا (1) •

(ب) سنثبت أن z الوارد في (1) وحيد • لنفترض أنه أيا كان x مـن H فـان

$$f(x) = \langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle.$$

عندئذ يكون $\langle x, z_1 - z_2\rangle = 0$ أيا كان x • واذا اخترنا العنصر الخاص $x = z_1 - z_2$ فاننـا نجـد أن

$$\langle x, z_1 - z_2\rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

لذا فان $z_1 - z_2 = 0$ ، أو $z_1 = z_2$ ، وبذا نكون قد أثبتنا الوحدانية •

(جـ) سنثبت أخيرا (2) • اذا كان $f = 0$ فان $z = 0$ وتكـون (2) صحيحة • لنفترض أن $f \neq 0$ • عندئذ يكون $z \neq 0$ • ويترتب على (1) بفرض $x = z$ وعلى (3) من البند ٢ـ٨ أن

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = f(z) \leqq \|f\| \, \|z\|.$$

وبالتقسيم على $\|z\| \neq 0$ نجد أن $\|z\| \leqq \|f\|$ • ونجد مـن (1) ومن متباينـة

شقارتز (البند ٣ــ٢) أن

$$|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leqq \|x\| \|z\|.$$

وهذا يقتضي أن يكون

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z\rangle| \leqq \|z\|. \quad \blacksquare$$

٣ــ٨ــ٢ تمهيدية (المساواة)

اذا كان $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle$ أيا كان w في فضاء جداء داخلي X ، فان $v_1 = v_2$ وبوجه خاص ، فاذا تحققت المساواة $\langle v_1, w\rangle = 0$ أيا كان w من X فان $v_1 = 0$.

البرهــان :

لدينا استنادا الى الفرض أنه أيا كان w فلن

$$\langle v_1 - v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle - \langle v_2, w\rangle = 0.$$

اذا وضعنا $w = v_1 - v_2$ ، أعطت هذه المساواة $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$. لذا فان $v_1 - v_2 = 0$ أي أن $v_1 = v_2$. وبوجه خاص ، فان المساواة $\langle v_1, w\rangle = 0$ تعطي بوضع $w = v_1$ المساواة $\|v_1\|^2 = 0$ ، أي أن $v_1 = 0$. $\blacksquare$

ان فائدة الداليات الخطية المحدودة على فضاءات هلبرت تنبع الى حد كبير من بساطة تمثيل ريس (1) . كذلك ، فان (1) جد هام في نظرية المؤثرات على فضاءات هلبرت . ويتجلى هذا بخاصة في مؤثر هلبرت المرافق T^* لمؤثـر خطي محدود T ، والذي سنعرفه في البند التالي . ولهذا الغرض فلابد لنا من تأهيب لا يخلو من فائدة عامة بحد ذاته ، وسننطلق من التعريف التالي .

٣ــ٨ــ٣ تعريف (الصيغة الخطية مرة ونصف المرة)

ليكن X و Y فضاءين متجهين على حقل واحد K (يساوي $\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$) . عندئذ

تكون **الصيغة الخطية مرة ونصف المرة (أو الدالي الخطي مرة ونصف المرة)** h على $X \times Y$ هي دالة

$$h:\ X \times Y \longrightarrow K$$

بحيث تتحقق المساويات التالية أيا كانت x و x_1 و x_2 من X و y و y_1 و y_2 من Y وايا كان العددان α و β :

$$(3)\quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & h(x_1+x_2,\ y) = h(x_1,\ y) + h(x_2,\ y) \\ \text{(b)} & h(x,\ y_1+y_2) = h(x,\ y_1) + h(x,\ y_2) \\ \text{(c)} & h(\alpha x,\ y) = \alpha h(x,\ y) \\ \text{(d)} & h(x,\ \beta y) = \bar{\beta} h(x,\ y). \end{array}$$

لذا فان h **خطـي** في مضمونه الاول **وخطي مرافق (او قرين)** في مضمونه الثاني.
واذا كان X و Y حقيقيين $(K=\mathbb{R})$ ، فان (3d) تغدو ببساطة المساواة

$$h(x,\ \beta y) = \beta h(x,\ y)$$

وعندئذ يدعى h تطبيقا **ثنائي الخطية** نظرا لكونه خطيا في مضمونيه .

واذا كان X و Y فضاءين منظمين ووجد عدد حقيقي c بحيث تتحقق المتباينة التالية أيا كان x و y

$$(4)\qquad |h(x,\ y)| \leqq c\,\|x\|\,\|y\|,$$

فاننا نقول إن h **محدود** ، كما نسمي العدد

$$(5)\qquad \|h\| = \sup_{\substack{x\in X-\{0\}\\ y\in Y-\{0\}}} \frac{|h(x,\ y)|}{\|x\|\,\|y\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}} |h(x,\ y)|$$

نظيم h . ∎

وعلى سبيل المثال ، فان الجداء الداخلي خطي مرة ونصف المرة ومحدود .

لاحظ أنه يترتب على (4) و (5) المتباينة

$$|h(x, y)| \leqq \|h\| \|x\| \|y\|. \tag{6}$$

هذا وقد سبق وورد مصطلح « خطي مرة ونصف المرة » في البند ٣ــ١ . كذلك فان كلمتي « صيغة » و « دالي » الواردتين في التعريف ٣ــ٨ــ٢ شائعتا الاستعمال ، واستخدام الاولى أو الثانية أمـر يعود بدرجة كبيرة الى الذوق الشخصي . وقد يكون من المستحسن استعمال كلمة « صيغة » في حال المتغيرين، والاحتفاظ بكلمة « دالي » لحالات المتغير الواحد . كما في المبرهنة ٣ــ٨ــ١ . وهذا ما سنفعله .

من الاهمية بمكان معرفة أنه يمكن انطلاقا من المبرهنة ٣ــ٨ــ١ الحصول على تمثيل عام للصيغ الخطية مرة ونصف المرة على فضاءات هلبرت على النحـو التالـي .

٣ــ٨ــ٤ مبرهنة (تمثيل ريس)

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت ، ولتكن

$$h: H_1 \times H_2 \longrightarrow K$$

صيغة محدودة وخطية مرة ونصف المرة . عندئذ يكون لـ h التمثيل

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle \tag{7}$$

حيث $S: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثر خطي محدود . ويتعين S هذا بصورة وحيدة بدلالة h . ونظيمه يعطى بالمساواة

$$\|S\| = \|h\|. \tag{8}$$

البرهـــان :

لنأخذ $\overline{h(x, y)}$ • نلاحظ أن هـــذا خطـــي بالنسبة الـــى y بسبب اشارة اللصاقة ——— • ولجعل المبرهنة ٣ــ٨ــ١ قابلة للتطبيق ، نبقي x مثبتا • عندها تعطي هذه المبرهنة تمثيلا يكون فيه y متغيرا • وليكن مثلا

$$\overline{h(x, y)} = \langle y, z \rangle.$$

وبالتالي فـــان

$$h(x, y) = \langle z, y \rangle. \tag{9}$$

ان z الذي ينتمي H_2 وحيد، ولكنه هو تابع بالطبع لعنصرنا x المثبت في H_1• يترتب على هذا أن المساواة (9) حيث المتغير هو x تحدد مؤثرا

$S: H_1 \longrightarrow H_2$ معرفا بالدستور $z = Sx$ •

وبتعويض $z = Sx$ في (9) ، فاننا نجد (7) •

ان S خطي ، ذلك أن ساحته هي الفضاء المتجهي H_1، وأننا نستنتج من (7) ومن خاصة الخطية مرة ونصف المرة أن

$$\begin{aligned}\langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y)\\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)\\ &= \alpha \langle Sx_1, y \rangle + \beta \langle Sx_2, y \rangle\\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y \rangle\end{aligned}$$

أيا كان y من H_2، وبالتالي فانه يترتب على التمهيدية ٣ــ٨ــ٢ أن

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2.$$

إن S محدود ، ذلك أنه اذا تجاوزنا الحالة التافهة $S = 0$ ، فاننا نجد أن

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \geqq \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{|\langle Sx, Sx\rangle|}{\|x\|\,\|Sx\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\|.$$

وهذا يثبت محدودية S ، ويبين فضلا عن ذلك أن $\|h\| \geqq \|S\|$ •

وللحصول على المساواة (8) نلاحظ أن المتباينة $\|h\| \leqq \|S\|$ تنتج من تطبيق متباينة شفارتز كما يلي :

$$\|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leqq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|} = \|S\|.$$

ان S وحيد ، ذلك أنه لو افترضنا وجود مؤثر خطي آخر $T: H_1 \longrightarrow H_2$ يحقق الشرط

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle,$$

أيا كان x من H_1 وأيا كان y من H_2 ، لوجدنا أن $Sx = Tx$ استنادا الى التمهيدية ٣ـ٨ـ٢ وذلك أيا كان x من H_1• لذا فان $S = T$ تعريفا • ∎

مسائل

١ ـ **(الفضاء $\mathbf{R}^3$)** • بين أنه يمكن تمثيل أي دالي خطي f على $\mathbf{R}^3$ بالجداء الداخلي :

$$f(x) = x \cdot z = \xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \xi_3\zeta_3.$$

٢ ـ **(الفضاء l^2)** • بين أنه يمكن تمثيل كل دالي خطي محدود f على l^2 بالشكل

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j\bar{\zeta}_j \qquad [z = (\zeta_j) \in l^2].$$

٣ ـ اذا كان z أي عنصر مثبت من فضاء جداء داخلي X ، فبين أن المساواة $f(x) = \langle x, z\rangle$ تحدد داليا خطيا محدودا f على X نظيمه هو $\|z\|$ •

٤ ــ لنأخذ المسألة ٣ ، فاذا كان التطبيق $X' \longrightarrow X$ المعرف بـ $f \mapsto z$ غامرا ، فبين أن X يجب أن يكون فضاء هلبرت •

٥ ــ أثبت بأن الفضاء الثنوي للفضاء الحقيقي l^2 هو l^2 • (أفد من ٣ــ٨ــ١) •

٦ ــ بين بأن المبرهنة٣ــ٨ــ١ تحدد تطبيقا ايزومتريا متباينا وغامرا $T: H \longrightarrow H'$ معرفا بـ $z \longmapsto f_z = \langle \cdot, z \rangle$ • وهذا التطبيق ليس خطيا ولكنه خطي مرافق ؛ أي أن $\alpha z + \beta v \longmapsto \bar{\alpha} f_z + \bar{\beta} f_v$ •

٧ ــ بين بأن الفضاء الثنوي H' لفضاء هلبرت H هو فضاء هلبرت المزود بالجداء الداخلي $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ المعرف كما يلي :

$$\langle f_z, f_v \rangle_1 = \overline{\langle z, v \rangle} = \langle v, z \rangle,$$

وحيث $f_z(x) = \langle x, z \rangle$ • وهلم جرا •

٨ ــ بين بأن كل فضاء H لهلبرت ايزومورفي (راجع البند ٣ــ٦) مع فضائه الثنوي الثاني $H'' = (H')'$ • (تدعى هذه الخاصة **انعكاسية** H • وسنتطرق اليها بمزيد من التفصيل في الفضاءات المنظمة في البند ٤ــ٦) •

٩ ــ **(العــادم)** • اشرح العلاقة بين M^a في المسألة ١٣ من البند ٢ــ١٠ وبين $M^\perp$ في البند ٣ــ٣ في حالة مجموعة جزئية غير خالية M في فضاء هلبرت H •

١٠ــ بين بأن الجداء الداخلي $\langle \cdot, \cdot \rangle$ على فضاء جداء داخلي X هو صيغة h خطية مرة ونصف المرة ومحدودة • ما هي $\|h\|$ في هذه الحالة ؟

١١ــ اذا كان X فضاء متجهيا وكانت صيغة خطيــة مرة ونصف المرة علــى $X \times X$ ، فبين أن المساواة $f_1(x) = h(x, y_0)$ ، حيث y_0 **مثبت** ، تعين داليا خطيا f_1 على X ، وكذلك الامر مع المساواة $f_2(y) = \overline{h(x_0, y)}$ ، **حيث** x_0 **مثبت** •

١٢ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين • بين بأن كل صيغة خطية مــرة ونصف المرة ومحدودة h على $X \times Y$ **مستمرة بالنسبة لكلا المتغيرين** •

١٣ــ (**الصيغة الهرميتية**) • ليكن X فضاء متجهيا عــلى حقل K • تعــرف **الصيغة الهرميتية مرة ونصف المرة** ، أو ببساطة ، **الصيغة الهرميتية** h على $X \times X$ بأنها تطبيق $h: X \times X \longrightarrow K$ بحيث تتحقق المساويات التالية أيا كانت العناصر x و y و z من X وأيا كان العدد α من K :

$$h(x+y, z) = h(x, z) + h(y, z)$$

$$h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$$

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}.$$

ما هو الشرط الاخير اذا كان $K = \mathbb{R}$ ؟ ما هو الشرط الواجب اضافته على h كي يغدو جداء داخليا على X ؟

١٤ــ (**متباينة شفارتز**) • ليكن X فضاء متجهيا و h صيغة هرميتية عــلى $X \times X$ • يقال عن هذه الصيغة انها **نصف محددة موجبة** اذا كان $h(x, x) \geqq 0$ أيا كان x من X • بين بأنه عندئذ تتحقق **متباينة شفارتز** التالية

$$|h(x, y)|^2 \leqq h(x, x) h(y, y).$$

١٥ــ (**نصف النظيم**) • اذا حققت h الشروط الواردة في المسألة ١٤ ، فبين أن المساواة

$$p(x) = \sqrt{h(x, x)} \qquad (\geqq 0)$$

تحدد نصف نظيم على X •(راجع المسألة ١٢ من البند ٢ــ٣) •

٣ــ٩ مؤثر هلبرت المرافق

تمكننا الآن النتائج المستخلصة مــن البند السابق بأن نقــدم مؤثر هلبرت المرافق لمؤثر خطي محدود على فضاء هلبرت • وقد نبعت فكرة استحداث هذا

المؤثر مـن مسائل المصفوفات ومسائل المعادلات التفاضلية الخطيـة والمعادلات التكاملية الخطية • وسنرى أنه يساعدنا في تعريف ثلاثة أصناف مهمة من المؤثرات (تدعــى المؤثــرات **المترافقة ذاتيا والمؤثرات الواحدية والمؤثرات الناظمية**) • وقد درست هذه المؤثرات بصورة مستفيضة لكونها تشغل مركزاطليعيا في العديد من البحوث التطبيقية المتنوعة •

٣ـ٩ـ١ تعريف (مؤثر هلبرت المرافق T^*)

ليكن $T: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثرا خطيا مرافقا ، حيث H_1 و H_2 فضاءان لهلبرت • عندئذ يكون **مؤثر هلبرت المرافق** T^* للمؤثر T هو المؤثر

$$T^*: H_2 \longrightarrow H_1$$

بحيث(*) تتحقق المساواة

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle. \tag{1}$$

▮

أيا كان x من H_1 وأيا كان y من H_2 •

وبالطبع ، فعلينا أن نبين أولا أنه يوجد لهذا التعريف معنى ، أي أنه يجب البرهان على أنه اذا كان المؤثر T معطى ، فان T^* موجود فعلا •

٣ـ٩ـ٢ مبرهنة (الوجود)

ان مؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر T الوارد في التعريف ٣ـ٩ـ١ موجود ووحيد وهو مؤثر خطي محدود نظيمه يعطى بالمساواة

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{2}$$

---

* من الممكن الدلالة على الجداءات الداخلية على H_1 و H_2 بالرمز نفسه نظرا لان العوامل تبين الى أي من الفضاءات يعود الجداء الداخلي •

البرهــان :

يعرف الدستور

$$h(y, x) = \langle y, Tx \rangle \tag{3}$$

صيغة خطية مرة ونصف المرة على $H_2 \times H_1$ ، ذلك أن الجداء الداخلي خطي مرة ونصف المرة وأن T خطي • وفي الحقيقة ، فان كون الصيغة خطية مرافقة تُرى مما يلــي :

$$\begin{aligned} h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) &= \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2) \rangle \\ &= \langle y, \alpha T x_1 + \beta T x_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle y, T x_1 \rangle + \bar{\beta} \langle y, T x_2 \rangle \\ &= \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta} h(y, x_2). \end{aligned}$$

إن h محدود ذلك أنه يترتب على متباينة شفارتز أن

$$|h(y, x)| = |\langle y, Tx \rangle| \leqq \|y\| \, \|Tx\| \leqq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

يترتب على هذا أن $\|h\| \leqq \|T\|$ • ولما كان $\|h\| \geqq \|T\|$ أيضا لان

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle y, Tx \rangle|}{\|y\| \, \|x\|} \geqq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Tx \neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx \rangle|}{\|Tx\| \, \|x\|} = \|T\|.$$

فاننا نستنتج أن

$$\|h\| = \|T\|. \tag{4}$$

إن المبرهنة ٣ــ٨ــ٤ تعطي تمثيل ريس لـ h • فاذا وضعنا فيها T^* عوضا عن S نجــد أن

$$h(y, x) = \langle T^* y, x \rangle, \tag{5}$$

كذلك فان هذه المبرهنة تبــين بأن $T^*: H_2 \longrightarrow H_1$ مؤثر خطي ومحدود يتعــين

بصورة وحيدة ونطبيه [راجع (4)] هــو

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|.$$

وهذا يثبت صحة (2) • وبمقارنة (3) و نجد أن $\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle$ ، وبذا نجــد (1) بأخذ المرافقات . وبالتالي فاننا نرى بأن T^* هو فعلا المؤثر المنشود •∎

لدى دراستنا لخواص مؤثرات هلبرت المرافقة ، نجد من الملائم الافادة مــن التمهيدية التالية :

٢ــ٩ــ٢ تمهيدية (المؤثر الصفري)

ليكن X و Y فضاءي جداء داخلي و$Q: X \longrightarrow Y$ مؤثــرا خطيــا محدودا . عندئذ نجد ما يلي :

(آ) الشرط اللازم والكافي كي يكون $Q=0$ هو أن يكون $\langle Qx, y\rangle = 0$ أيا كان x من X وايا كان y من Y •

(ب) اذا كان $Q: X \longrightarrow X$ ، حيث X عقدي ، وكان $\langle Qx, x\rangle = 0$ أيا كان x من X ، فان $Q=0$ •

البرهــان :

(آ) ان المســاواة $Q=0$ تعنــي أن $Qx=0$ أيا كان x ; وهــذا يقتضي التالــي :

$$\langle Qx, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0\langle w, y\rangle = 0.$$

وبالعكس ، فان تحقق المساواة $\langle Qx, y\rangle = 0$ أيا كان x و y يقتضــي المســاواة $Qx=0$ أيا كان x وذلك استنادا الى ٣ــ٨ــ٢ • وبالتالي فان $Q=0$ تعريفا •

(ب) لدينا بالفرض أن $\langle Qv, v\rangle = 0$ أيا كان $v = \alpha x + y \in X$ ، أي أن

$$0 = \langle Q(\alpha x + y), \alpha x + y\rangle$$
$$= |\alpha|^2 \langle Qx, x\rangle + \langle Qy, y\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle.$$

ان الحدين الاولين في الطرف الايمن صفريان فرضا • فاذا كان $\alpha = 1$ وجدنا أن

$$\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle = 0.$$

واذا كان $\alpha = i$ ، فان $\bar{\alpha} = -i$ وعندئذ يكون

$$\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle = 0.$$

وبجمع المساواتين الاخيرتين نجد أن $\langle Qx, y\rangle = 0$ ، وعندئذ تنتج المساواة $Q = 0$ مـن (آ) • ∎

من الضروري أن يكون X عقديا في الشق (ب) من هذه التمهيدية ، ذلك أن هذه النتيجة قد لا تصح في حال كون X حقيقيا • وكمثال عكسي نورد الدوران Q للمستوى $\mathbf{R}^2$ بزاوية قائمة • ان Q خطي و $Qx \perp x$ ، لذا فان $\langle Qx, x\rangle = 0$ أيا كان x من $\mathbf{R}^2$ ، في حين أن $Q \neq 0$ • (ما هي الحال عنـدما يكون مثل هـذه الدوران في المستوي العقدي ؟) •

يمكننا الآن ادراج بعض الخواص العامة لمؤثرات هلبرت المرافقة واقامـة البرهان على صحة هذه الخواص التي سنستعملها مرارا وتكرارا لـدى تطبيق هذه المؤثرات •

٣-٩-٤ مبرهنة (خواص مؤثرات هلبرت المرافقة)

ليكن H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت ، وليكن $S: H_1 \longrightarrow H_2$ و $T: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثرين خطيين محدودين ، وليكن α عددا ما • عندئذ نجد التالي :

(a) $\langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \qquad (x \in H_1,\ y \in H_2)$

(b) $(S+T)^* = S^* + T^*$

(c) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(6) (d) $(T^*)^* = T$

(e) $\|T^* T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

(f) $T^* T = 0 \iff T = 0$

(g) $(ST)^* = T^* S^*$ (بفرض أن $H_2 = H_1$)

البرهـان :

(آ) إن (1) تنتج من (6a) :

$$\langle T^* y, x\rangle = \overline{\langle x, T^* y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

(ب) نستنتج من (1) أيا كان x و y فان

$$\begin{aligned}\langle x, (S+T)^* y\rangle &= \langle (S+T)x, y\rangle \\ &= \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle \\ &= \langle x, S^* y\rangle + \langle x, T^* y\rangle \\ &= \langle x, (S^* + T^*)y\rangle.\end{aligned}$$

لذا فان $(S+T)^* y = (S^* + T^*)y$ أيا كان y استنادا الى ٣ـ٨ـ٢ ، وبذا نكون قـد وجدنا (6b) •

(جـ) يجب عدم الخلط بين الدستور (6c) والدستور $T^*(\alpha x) = \alpha T^* x$ • ونجد (6c) بالحسابات التالية وبتطبيق الشق (آ) من التمهيدية ٣ـ٩ـ٣ عـلى $Q = (\alpha T)^* - \bar{\alpha} T^*$ •

$$\begin{aligned}\langle (\alpha T)^* y, x\rangle &= \langle y, (\alpha T)x\rangle \\ &= \langle y, \alpha(Tx)\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle y, Tx\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle T^* y, x\rangle \\ &= \langle \bar{\alpha} T^* y, x\rangle.\end{aligned}$$

(د) ان $(T^*)^*$ تكتب بالشكل T^{**} وتساوي T ، ذلك أنه أيا كان x من H_1 و y من H_2 ، فانه يترتب على (6a) و (1) أن

$$\langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

وعندئذ نستنتج (6d) من الشق (آ) من التمهيدية ٣ــ٩ــ٣،حيث $Q=(T^*)^*-T$ •

(هـ) نرى أن $T^*T: H_1 \longrightarrow H_1$ في حين أن $TT^*: H_2 \longrightarrow H_2$ • ونجد بناء على متباينة شفارتز أن

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqq \|T^*Tx\|\,\|x\| \leqq \|T^*T\|\,\|x\|^2.$$

فاذا أخذنا الحد الاعلى sup من أجل جميع العناصر x التـي نظيم كل منها 1 ، فاننا نجد أن $\|T\|^2 \leqq \|T^*T\|$ • وبالافادة من (7) من البند ٢ــ٧ ومن (2) فاننا نجـد أن

$$\|T\|^2 \leqq \|T^*T\| \leqq \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2.$$

لذا فان $\|T^*T\| = \|T\|^2$ • ونجد أيضا لدى الاستعاضة عن T بـ T^* واستعمال (2) ثانيـة أن

$$\|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2.$$

أن $T^{**}=T$ هنا استنادا الى (6d) ، وبالتالي فانه يكتمل اثبات (6e) •

(و) إن (6f) تستنتج مباشرة من (6e) •

(ز) ان التطبيق المتكرر لـ (1) يعطي

$$\langle x, (ST)^*y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle.$$

لذا فان $(ST)^*y = T^*S^*y$ بناء على ٣ــ٨ــ٢ ، وما المساواة هذه الا (6g) تعريفا • ∎

مسـائل

١ ــ أثبت أن $0^*=0$ و $I^*=I$ •

٢ ــ ليكن H فضاء هلبرت و $T: H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا متباينا وغامرا عكسه محدود • بين أن $(T^*)^{-1}$ موجود وأن

$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

٣ ـ اذا كانت (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة على فضاءات هلبرت H وكان $T_n \longrightarrow T$ ، فبين أن $T_n^* \longrightarrow T^*$ •

٤ ـ ليكن H_1 و H_2 فضاءي هلبرت و $T: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثرا خطيا محدودا • فاذا كانت $M_1 \subset H_1$ و $M_2 \subset H_2$ مجموعتين جزئيتين بحيث أن $T(M_1) \subset M_2$ ، فأثبت أن $M_1^{\perp} \supset T^*(M_2^{\perp})$ •

٥ ـ ليكن M_1 و M_2 في المسألة ٤ فضاءين جزئيين مغلقين • بين عندئذ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T(M_1) \subset M_2$ هو أن يكون $M_1^{\perp} \supset T^*(M_2^{\perp})$•

٦ ـ اذا كان $M_1 = \mathcal{N}(T) = \{x \mid Tx = 0\}$ في المسألة ٤ ، فبين أن

$$(a)\quad T^*(H_2) \subset M_1^{\perp}, \qquad (b)\quad [T(H_1)]^{\perp} \subset \mathcal{N}(T^*), \qquad (c)\quad M_1 = [T^*(H_2)]^{\perp}$$

٧ ـ ليكن T_1 و T_2 مؤثرين خطيين محدودين على فضاء هلبرت العقدي H في الفضاء نفسه • فاذا كان $\langle T_1x, x\rangle = \langle T_2x, x\rangle$ أيا كان x من H ، فأثبت أن $T_1 = T_2$ •

٨ ـ ليكن $S = I + T^*T: H \longrightarrow H$ ، حيث T خطي ومحدود • بين أن $S^{-1}: S(H) \longrightarrow H$ موجود •

٩ ـ برهن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون للمؤثر الخطي المحدود $T: H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت H مدى ذو بعد منته هو أن يكون بالامكان تمثيل T بالشكل

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j\rangle w_j \qquad [v_j, w_j \in H]$$

١٠ـ **(مؤثر النقل الايمن)** • لتكن (e_n) متتالية متعامدة منظمة في فضاء هلبرت الفصول H ، ولنعرف **مؤثر النقل الايمن** بأنه المؤثر الخطي $T: H \longrightarrow H$ بحيث أن $Te_n = e_{n+1}\ ,\quad n = 1, 2, \cdots$ • فسر مبرر التسمية • أوجد المدى والفضاء الصفري والنظيم ومؤثر هلبرت المرافق للمؤثر T •

٣ــ١٠ المؤثرات المترافقة ذاتيا والواحدية والناظمية

يمكن تحديد صفوف المؤثرات الخطية المحدودة ذات الاهمية العملية الكبيرة باستعمال مؤثر هلبرت المرافق على النحو التالي :

٣ــ١٠ــ١ تعريف (المؤثرات المترافقة ذاتيا والواحدية والناظمية)

يقال عن مؤثر خطي محدود $T\colon H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت H إنه

مترافق ذاتيا (أو قرين ذاتيا) أو هرميتي اذا كان $T^* = T,$

واحــدي اذا كان T متباينا وغامرا وكان $T^* = T^{-1},$

ناظمــي اذا كان $TT^* = T^*T.$ ∙

ويعرف مؤثر هلبرت المرافــق T^* لـ T بالمساواة (1) من البند ٣ــ٩ ، أي بالمســاواة

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

واذا كان T مترافقا ذاتيا ، فاننا نرى بأن الدستور يغدو بالشكل

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \tag{1}$$

اذا كان T مترافقا ذاتيا أو كان واحديا ، فانه ناظمي

يمكن أن نرى ذلك رأسا من التعريف ∙ وبالطبع ، فليس لزاما على المؤثــر الناظمي أن يكون مترافقا ذاتيا أو واحديا ∙ فمثلا ، اذا كان $I\colon H \longrightarrow H$ المؤثر المطابق ، فان $T = 2iI$ ناظمي لان $T^* = -2iI$ (راجع ٣ــ٩ــ٤) ، وبالتالي فــان $TT^* = T^*T = 4I$ ، في حين أن $T^* \neq T$ ، كما أن $T^* \neq T^{-1} = -\frac{1}{2}iI$ ∙

وتنتج المؤثرات غير الناظمية ببساطة من المثال التالي ∙ ونورد في المسألة ١٠ من البند ٣ــ٩ مؤثرا آخر T ، الامر الذي نترك اثباته للقارىء ∙

هــذا ونستعمل المصطلحات الــواردة في التعريف ٣ــ١٠ــ١ في صــدد

المصفوفات كذلك ، ونود شرح سبب هذا ونورد ذكـر بعض العلاقات الهامـة فيمـا يلـي :

٣ـ١٠ـ٢ مثال (المصفوفات)

لنأخذ C^n حيث الجداء الداخلي معرف بالمساواة (راجع ٣ـ١ـ٤)

$$\langle x, y\rangle = x^{T}\bar{y}, \tag{2}$$

بفرض أن x و y يكتبان على شكل متجهين عموديين ، وأن T تعني المنقول ، لذا فان $x^{T}=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ كما أننا نستعمل ضرب المصفوفات العادي .

ليكن $T: C^n \longrightarrow C^n$ مؤثرا خطيا (وهو مؤثر محدود بناء على المبرهنـة ٢ـ٧ـ٨) . فاذا أعطينا قاعدة لـ C^n ، فيمكن تمثيل T ومؤثر هلبرت المرافق له T^* بمصفوفتين مربعتين $n \times n$، وليكونا مثلاً A وB على الترتيب .

فاذا استعملنا (2) والقاعدة المعروفة $(Bx)^{T}=x^{T}B^{T}$ حول منقول الجـداء ، نجـد أن

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^{T}\bar{y} = x^{T}A^{T}\bar{y}$$

وأن

$$\langle x, T^*y\rangle = x^{T}\bar{B}\bar{y}.$$

نستنتج بناء على (1) من البند ٣ـ٩ أن الطرفين الايسرين متساويان أيا كان x و y من C^n . لذا فيجب أن يكون $A^{T}=\bar{B}$ ، وبالتالي يكون

$$B = \bar{A}^{T}.$$

وبذا نتوصل الى النتيجة التالية :

اذا أعطيت قاعدة لـ C^n ، وكان مؤثر خطي على C^n ممثلا بمصفوفة معينة ، فان مؤثر هلبرت المرافق يمثل بالمرافق العقدي لمنقول المصفوفة .

وبالتالي ، فان المصفوفة الممثّلة

هرميتيــة اذا كان T مترافقا ذاتيا (هرميتيا)
واحديــة اذا كان T واحديا
ناظميــة اذا كان T ناظميا •

وبصورة مماثلة ، فاذا كان $T: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ مؤثرا خطيا ، فـان المصفوفة الممثّلـة

حقيقية متناظرة اذا كان T مترافقا ذاتيا
متعامــدة اذا كان T واحديا •

ومن المفيد في هذا الصدد أن نعيد الى الذاكرة بعض التعاريف • نقول عن مصفوفة مربعة $A = (\alpha_{jk})$ انهـا :

هرميتية اذا كان $\bar{A}^{T} = A$ (اذن $\bar{\alpha}_{kj} = \alpha_{jk}$)
هرميتية تخالفية اذا كان $\bar{A}^{T} = -A$ (اذن $\bar{\alpha}_{kj} = -\alpha_{jk}$)
واحديــة اذا كان $\bar{A}^{T} = A^{-1}$
ناظميــة اذا كان $A\bar{A}^{T} = \bar{A}^{T}A$

ونقول عن مصفوفة حقيقية $A = (\alpha_{jk})$ انها

(حقيقية) متناظرة اذا كان $A^{T} = A$ (اذن $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$)
(حقيقية) متناظرة تخالفية اذا كان $A^{T} = -A$ (اذن $\alpha_{kj} = -\alpha_{jk}$)
متعامــدة اذا كان $A^{T} = A^{-1}$ •

لذا فان المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة (حقيقية) ، والمصفوفة الحقيقية الهرميتية التخالفية هي مصفوفة (حقيقية) متناظرة تخالفية ، والمصفوفة الحقيقية الواحدية هي مصفوفة متعامدة • (ينسب اسم المصفوفات الهرميتية الى الرياضي الفرنسي شارل هرميت ١٨٢٢ ـ ١٩٠١ م) • ■

لننتقل الى المؤثرات الخطية على فضاء هلبرت الكيفية لايراد معيار هـام وبسيط للترافق ذاتيا •

٣-١٠-٢ مبرهنة (الترافق ذاتيا)

ليكن $T: H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا على فضاء هلبرت H . عندئذ نجد ما يلي :

(آ) اذا كان T مترافقا ذاتيا ، فان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي أيا كان x من H .

(ب) اذا كان H عقديا وكان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقيا أيا كان x من H ، فان المؤثر T مترافق ذاتيا .

البرهان :

(آ) اذا كان T مترافقا ذاتيا ، فاننا نجد أن

$$\overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle.$$

أيا كان x . وبالتالي فان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقي لكونه مساويا لمرافقه العقدي .

(ب) اذا كان $\langle Tx, x \rangle$ حقيقيا أيا كان x فان

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \overline{\langle x, T^*x \rangle} = \langle T^*x, x \rangle.$$

لذا فان

$$0 = \langle Tx, x \rangle - \langle T^*x, x \rangle = \langle (T - T^*)x, x \rangle$$

ويترتب على هذا أن $T - T^* = 0$ بناء على الشق (ب) من التمهيدية ٣-٩-٣ وذلك لكون H عقديا . ∎

من الضروري أن يكون الفضاء H عقديا في الشق (ب) من المبرهنة ؛ وهذا أمر بيّن ذلك أنه اذا كان H حقيقيا ، فان الجداء الداخلي عدد حقيقي ، وعندئذ يكون $\langle Tx, x \rangle$ حقيقيا دون فرض أي شروط أخرى على المؤثر الخطي T .

ان مركب مؤثرين مترافقين ذاتيا غالبا ما يرد في التطبيقات ، لذا فان المبرهنة التالية لاتخلو من فائدة في هذا الصدد .

٣ــ١٠ــ٤ مبرهنة (الترافق ذاتيا لمركب مؤثرين)

الشرط اللازم والكافي كي يكون مركب مؤثرين خطيين مترافقين ذاتيا ومحدودين S و T على فضاء هلبرت H مترافقا ذاتيا هو أن يكون هذان المؤثران تبادليين (قابلين للمبادلة) ، أي أن يكون

$$ST = TS.$$

البرهــان :

لدينا استنادا الى (6g) من البند السابق والى الفرض ما يلي

$$(ST)^* = T^* S^* = TS.$$

لــذا فــان

$$ST = (ST)^* \quad \Longleftrightarrow \quad ST = TS.$$

وبذا يكتمل البرهان ∎

ان متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتيا ترد في مسائل متنوعة ، ونسوق في هذا الصدد المبرهنة التالية :

٣ــ١٠ــ٥ مبرهنة (متتاليات المؤثرات المترافقة ذاتيا)

لتكن (T_n) متتالية مـن المؤثـرات الخطيـة المحدودة والمترافقـة ذاتيـا $T_n : H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت H . لنفترض أن (T_n) متقاربة من T ، أي أن $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ ، حيث $\|\cdot\|$ هو النظيم على الفضاء $B(H, H)$ (راجـع البنـد ٢ــ١٠) . عندئذ تكون النهاية T مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا على H .

البرهــان :

يجب اثبات أن $T^* = T$ ، وهذا ناتج من $\|T - T^*\| = 0$. ولاثبات المساواة الاخيرة ، نرى أنه بناء على ٣ــ٩ــ٤ و ٣ــ٩ــ٢ يكون

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$$

ثم نجد استنادا الى متباينة المثلث في $B(H,H)$ أن

$$\|T-T^*\| \leqq \|T-T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\|$$
$$= \|T-T_n\| + 0 + \|T_n - T\|$$
$$= 2\|T_n - T\| \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

لذا فان $\|T-T^*\|=0$ ، أي أن $T^*=T$ ∙ ∎

ان هذه المبرهنات تمدنا بفكرة بسيطة عـن الخواص الاساسية للمؤثرات الخطية المترافقة ذاتيا ∙ وهي تقدم لنا العون كذلك في أبحاثنا المقبلة ، وبخاصة في النظرية الطيفية لهذه المؤثرات (الفصل التاسع) ، حيـث سنسوق خواص أخـرى ∙

سننتقل الآن الـى المؤثرات الواحدية ونتعرف الى بعض مـن خواصها الرئيسـية ∙

٣ـ١٠ـ٦ مبرهنة (المؤثر الواحدي)

ليكن $U: H \longrightarrow H$ و $V: H \longrightarrow H$ مؤثرين واحديين ، حيث نفترض هنا H فضاء هلبرت . عندئذ نجد التالي :

(آ) U ايزومتري (راجع ١ـ٦ـ١) ، وبالتالي يكون $\|Ux\|=\|x\|$ أيا كان x مـن H ،

(ب) $\|U\|=1$ ، شريطة أن يكون $H\neq\{0\}$ ،

(جـ) المؤثر U^{-1}(الذي يساوي U^*)واحدي ،

(د) UV واحـدي ،

(هـ) U ناظمـي .

وفضلا عن ذلك فان

(و) الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي محدود T على فضاء هلبرت العقدي H واحديا هو ان يكون T ايزومتريا وغامرا .

البرهـان :

(آ) يمكن أن نرى هذا الشق من كون

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle x, U^*Ux\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2$$

(ب) هذا الشق ينتج مباشرة من (آ) •

(جـ) لما كان U متباينا وغامرا ، فان U^{-1} يكون كذلك ، وبالتالي نجد وفق ٣ــ٩ــ٤ أن

$$(U^{-1})^* = U^{**} = U = (U^{-1})^{-1}.$$

(د) ان UV متباين وغامر ، وعندها تعطى ٣ــ٩ــ٤ و ٢ــ٦ــ١١ ما يلي :

$$(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$$

(هـ) ان صحة هـذا الشـق تنتـج مـن كـون $U^{-1} = U^*$ ومـن أن $UU^{-1} = U^{-1}U = I$ •

(و) لنفترض T ايزومتريا وغامرا • بما أن الايزومترية تقتضي التباين ، فان T متباين وغامر • سنبين أن $T^* = T^{-1}$ • لدينا استنادا الى الايزومتريـة مـا يلـي :

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle.$$

وبالتالي فان

$$\langle (T^*T - I)x, x\rangle = 0$$

إذن $T^*T - I = 0$ وفق التمهيدية ٣ــ٩ــ٣ ، أي أن $T^*T = I$ • ينتج مـن هذا أن

$$TT^* = TT^*(TT^{-1}) = T(T^*T)T^{-1} = TIT^{-1} = I.$$

يترتب على ما سبق أن $T^*T = TT^* = I$ ، وبالتالي يكون $T^* = T^{-1}$ ، الامر الذي يعني أن T واحدي • أما العكس فواضح نظرا لكون T ايزومتريا بناء على (آ) وغامرا تعريفا • ∎

لاحظ بأن المؤثر الايزومتري ليس واحديا بالضرورة ، ذلك أنه قد لايكون

عامـــرا • وكمثال نورد مؤثر النقل الايمن $T: l^2 \longrightarrow l^2$ المحدد بالدستور

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \quad \longmapsto \quad (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

حيـــث $x = (\xi_j) \in l^2$

مســـائل

١ ـــ اذا كان S و T مؤثرين خطيين محدودين ومترافقين ذاتيا على فضاء هلبرت H ، وكان α و β عددين حقيقيين ، فبين أن $\tilde{T} = \alpha S + \beta T$ مترافق ذاتيا •

٢ ـــ كيف يمكن استعمال المبرهنة ٣ـــ١٠ـــ٣ في اثبات المبرهنة ٣ـــ١٠ـــ٥ في حالة فضاء هلبرت العقدي H ؟

٣ ـــ بين أنه اذا كان $T: H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا ، فان T^n يكون كذلك ، حيث n عدد صحيح موجب •

٤ ـــ بين بأنه اذا كان T مؤثرا خطيا محدودا على H ، فان المؤثرين

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \qquad \text{و} \qquad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

مترافقان ذاتيا • بين أن

$$T = T_1 + iT_2, \qquad\qquad T^* = T_1 - iT_2.$$

أثبت خاصة الوحدانية ، أي أن $T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$ تقتضي $S_1 = T_1$ و $S_2 = T_2$ نفترض هنا أن S_1 و S_2 مترافقان ذاتيا •

٥ ـــ ليكن $T: \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ مؤثرا معرفا بالمساواة $Tx = (\xi_1 + i\xi_2, \xi_1 - i\xi_2)$ ، حيـــث $x = (\xi_1, \xi_2)$ • (لتعريف $\mathbf{C}^2$ راجـــع ٣ـــ١ـــ٤) • أوجـــد T^* • بـــين أن $T^*T = TT^* = 2I$ • أوجد T_1 و T_2 المعرفين في المسألة ٤ •

٦ ـ اذا كان $T: H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا محدودا ومترافقا ذاتيا ، وكان $T \neq 0$ ، فان $T^n \neq 0$ • أثبت صحة هذا القول في كل من الحالتين التاليتين : (آ) عندما يكون $n = 2, 4, 8, 16, \cdots$ ، (ب) عندما يكون $n \in \mathbf{N}$ •

٧ ـ بين بأن المتجهات العمودية في مصفوفة واحدية تشكل مجموعة متعامدة منظمة بالنسبة للجداء الداخلي على $\mathbf{C}^n$ •

٨ ـ أثبت أن المؤثر الخطي الايزومتري $T: H \longrightarrow H$ يحقق المساواة $T^*T = I$ ، حيث I هو المؤثر المطابق على H •

٩ ـ بين بأن المؤثر الخطي الايزومتري وغير الواحدي $T: H \longrightarrow H$ ينقل فضاء هلبرت H على فضاء جزئي تماما من H •

١٠ـ ليكن X فضاء جداء داخلي و $T: X \longrightarrow X$ مؤثرا خطيا ايزومتريا • فاذا كان $\dim X < \infty$ ، فبين أن T واحدي •

١١ـ **(التكافؤ الواحدي)** • ليكن S و T مؤثرين خطيين على فضاء هلبرت H • نقول عن المؤثر S أنه **مكافيء واحديا** للمؤثر T اذا وجد مؤثر واحدي U على H بحيث يكون

$$S = UTU^{-1} = UTU^*.$$

فاذا كان T مترافقا ذاتيا ، فبين أن S مترافق ذاتيا •

١٢ـ بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون T ناظميا هو أن يكون T_1 و T_2 الواردان في المسألة ٤ تبادليين • اشرح قسما من هذا بالاستعانة بمصفوفات ناظمية ذات سطرين •

١٣ـ اذا كانت $T_n: \ H \longrightarrow H \ (n = 1,2, \cdots)$ مؤثراتخطية ناظمية ، وكان $T_n \longrightarrow T$ ، فبين بأن T مؤثر خطي ناظمي •

١٤ـ اذا كان S و T مؤثرين خطيين ناظميين يحققان المساواة $ST^* = T^*S$ ، وكان $TS^* = S^*T$ ، فبين بأن مجموعهما $S+T$ وجداءهما ST ناظميان •

١٥ ــ بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مؤثر خطي محدود $T: H \longrightarrow H$ على فضاء هلبرت العقدي H ناظميا هو أن يكون $\|T^*x\|=\|Tx\|$ أيا كان x من H • أثبت بالاستعانة بهذا أنه اذا كان T مؤثرا خطيا ناظميا فان

$$\|T^2\|=\|T\|^2.$$

* * *

الفصل الرابع

مبرهنات اساسية حول الفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ

يمكننا القول بأن هذا الفصل يحوي أسس النظرية المتقدمة للفضاءات المنظمة وفضاءات باناخ ، والتي لولاها لكانت الفائدة التي نجنيها من هذه الفضاءات وتطبيقاتها جد محدودة • والمبرهنات الهامة الواردة في هذا الفصل هي نظرية هان ـ باناخ ، ونظرية المحدودية المنتظمة ، ونظرية التطبيق المفتوح ، ونظرية البيان المغلق • وتشكل هذه المبرهنات حجر الزاوية في نظرية فضاءات باناخ (علما بأن المبرهنة الاولى تسري على أي فضاء منظم) •

توجيه مختصر حول المحتوى الرئيسي

١ ـ مبرهنة هان ـ باناخ ٤ـ٢ـ١ (وشكلاها الآخران ٤ـ٣ـ١ و ٤ـ٣ـ٢) ، تدور حول تمديد الداليات الخطية على الفضاءات المتجهية • وهي تكفل كون الفضاء المنظم ذا مخزون وفير من الداليات الخطية ، بحيث اننا نجد نظرية ملائمة للفضاءات الثنوية ونظرية مرضية للمؤثرات المرافقة (البندان ٤ـ٥ و ٤ـ٦) •

٢ ــ مبرهنة المحدودية المنتظمة ٤ــ٧ــ٣ لباناخ وشتاينهاوس • تعطينا هذه المبرهنة الشروط الكافية كي تكون المتتالية ($\|T_n\|$) محدودة ، حيث T_n مؤثرات خطية محدودة من فضاء باناخ في فضاء منظم • ولها تطبيقات متنوعة (بعضها بسيط وبعضها عميق) في التحليل ، وبخاصة فيما يتعلق بمتسلسلات فوريه (٤ــ٧ــ٥) ، والتقارب الضعيف (البندان ٤ــ٨ و ٤ــ٩) ، وجموعية المتتاليات (البند ٤ــ١٠) ، والمكاملة العددية (البند ٤ــ١١) ، وغيرها •

٣ ــ **مبرهنة التطبيق المفتوح** ٤ــ١٢ــ٢ • تنص هذه المبرهنة على أن كل مؤثر خطي محدود T من فضاء باناخ على فضاء باناخ هو **تطبيق مفتوح** ، أي أن صور المجموعات المفتوحة وفق T هي مجموعات مفتوحة • لذا فانه اذا كان T متباينا وغامرا ، كان T^{-1} مستمرا (**«مبرهنة العكس المحدود»**) •

٤ ــ **مبرهنة البيان المغلق** ٤ــ١٣ــ٢ • تعطي هذه المبرهنة الشروط التي تجعل من مؤثر خطي مغلق (راجع ٤ــ١٣ــ١) محدودا • وتتمتع المؤثرات الخطية المغلقة بأهمية كبيرة في التطبيقات الفيزيائية وغيرها •

٤ــ١ تمهيدية زورن

سنحتاج الى تمهيدية زورن في اثبات مبرهنة هان ــ باناخ الاساسية ، والتي هي مبرهنة حول تحديد الداليات الخطية ، وهي هامة لاسباب سنأتي على ذكرها لدى صياغتنا للمبرهنة • ويوجد لتمهيدية زورن تطبيقات متنوعة ، سنعرض لاثنين منها في موضع لاحق من هذا البند • ودعامة هذه التمهيدية مجموعة مرتبة جزئيا نعرفها فيما يلي :

٤ــ١ــ١ تعريف (المجموعة المرتبة جزئيا ، السلسلة)

المجموعة المرتبة جزئيا هي مجموعة M عرفنا عليها **ترتيبا جزئيا** ، وهو علاقة ثنائية نرمز لها بـ $\leqq$ وتحقق الشروط التالية :

(تج١) $a \leqq a$ أيا كان a من M **(خاصة الانعكاس)**

(تج٢) اذا كان $a \leqq b$ و $b \leqq a$ ، فان $a=b$ **(خاصة التخالف)**

(تج٣) اذا كان $a \leqq b$ و $b \leqq c$ ، فان $a \leqq c$ **(خاصة التعدي)**

ان كلمة « جزئيا » تؤكد بأن M قـد تحوي عنصرين a و b بحيث أنـه لا تتحقق أي من العلاقتين $a \leqq b$ و $b \leqq a$ • وفي هذه الحالة نقول عن a و b انهما عنصران غير متقارنين (أو **غيرقابلين للمقارنة**) • وبالمقابل ، فاننـا نقول عـن عنصرين a و b انهما متقارنان (أو **قابلان للمقارنة**) اذا تحققت العلاقة $a \leqq b$ أو العلاقة $b \leqq a$ (أو كلاهما) •

المجموعة المرتبة كليا (أو السلسلة) هي مجموعة مرتبة جزئيا كل عنصرين فيها قابلان للمقارنة • وبعبارة أخرى ، فان السلسلة هي مجموعة مرتبة جزئيا غير حاوية على عناصر غير قابلة للمقارنة •

العنصـــر الراجـــح لمجموعة جزئية W من مجموعة M مرتبة جزئيـا هو عنصر u من M بحيث أن

$x \leqq u$ أيا كان x من W

(ان u تابع لـ M و W ، وهو قد يكون موجودا ، وقد لا يكون) • ويعـرف **العنصر الاعظمي** لـ M بأنه عنصر m من M بحيث أن

$m \leqq x$ تقتضي $m=x$

(ومرة أخرى نقول بأن M قد تحوي عناصر أعظمية ، وقد لا تحوي مثل هـذه العناصر • لاحـظ أيضا ان العنصر الاعظمي ليس بالضرورة عنصرا راجحا) •∎

أمثلـة

٤ـ١ـ٢ الاعداد الحقيقية •

لتكن M مجموعة كل الاعـداد الحقيقية ، ولنفترض أن للعلاقـة $x \leqq y$ معناها المعتاد • ان M مرتبة كليا ، ولا يوجد لها عنصر أعظمي •

٤–١–٣ مجموعة القـوة

لتكن $\mathcal{P}(X)$ **مجموعة قـوة** (أي مجموعة أجـزاء) مجموعة معطاة X ، ولنفرض أن $A \leqq B$ تعني $A \subset B$ ، أي أن A جزء من B • عندئذ تكون $\mathcal{P}(X)$ مرتبة جزئيا • ان العنصر الاعظمي الوحيد لـ $\mathcal{P}(X)$ هو X •

٤–١–٤ المرتبات n من الاعداد

لتكن M مجموعة كل المرتبات n $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$،... مـن الاعداد الحقيقية ، وليكن $x \leqq y$ يعني أن $\xi_j \leqq \eta_j$ أيا كان $j = 1, \cdots, n$ ، حيث للمتباينة $\xi_j \leqq \eta_j$ معناها المألوف • ان هذا يحدد ترتيبا جزئيا على M •

٤–١–٥ الاعداد الصحيحة

لتكن $M = \mathbf{N}$ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة • فاذا افترضنا أن $m \leqq n$ تعني بأن m تقسم n ، فاننا نكون قد عرفنا ترتيبا جزئيا على $\mathbf{N}$ •

هنالك أمثلة أخرى أوردناها في مجموعة المسائل •

وباستعمال المفاهيم الواردة في ٤–١–١ ، فمن الممكن صياغة تمهيدية زورن التي نعتبرها موضوعة(*) ، على النحو التالي :

٤–١–٦ تمهيدية زورن

لتكن M مجموعة غير خالية مرتبة جزئيا • فاذا افترضنا أن لكل سلسلة C في M عنصرا راجحا ، فانه يوجد لـ M عنصر أعظمي واحد على الاقل •

تطبيقـات

٤–١–٧ قاعـدة هامـل

لكل فضاء متجهي $X \neq \{0\}$ قاعدة هامل • (راجع البند ٢–١) •

---

* تستعمل التسمية «تمهيدية» لاسباب تاريخية • ويمكن استنتاج تمهيدية زورن من **موضوعة الاختيار** ، التي تنص على أنه يوجد لكل مجموعة معطاة E تطبيق c (هو «تطبيق الاختيار») معرف على $\mathcal{P}(E)$ ويأخذ قيمة في E ، بحيث أنه اذا كان $B \subset E$ و $B \neq \varnothing$ ، فان $c(B) \in B$ • وبالعكس ، فـان هـذه الموضوعة تنتج من تمهيدية زورن ، وبالتالي فان تمهيدية زورن وموضوعـة الاختيار يمكن اعتبارهما موضوعتين متكافئتين •

البرهــان :

لتكن M مجموعة كــل المجموعات الجزئية المستقلة خطيا في X • بمــا أن $X\neq\{0\}$ ، فهنالك عنصر $x\neq 0$ بحيث $\{x\}\in M$ ، وبالتالي فان $M\neq\varnothing$ • ان علاقة الاحتواء تعرف ترتيبا جزئيا على M (راجع ٤ــ١ــ٣) ، ولكل سلسلة C محتواة في M عنصــر راجــح ، ألا وهــو اجتماع كل المجموعات الجزئية في X التي هي عناصر من C •• اذا استندنا الى تمهيدية زورن ، فاننا نرى أنه يوجد لـ M عنصر أعظمي B ، وسنبين الآن أن B هو قاعدة هامل لـ X • ليكن $Y=\operatorname{span} B$ • عندئذ يكون Y فضاء جزئيا من X ، كما أن $Y=X$ لانه اذا لم يتحقق هذا لكانت $B\cup\{z\},\ z\in X,\ z\notin Y$ جملة مستقلة خطيا تحوي تماما B كمجموعة جزئيــة، وهذا يناقض كون B عنصرا أعظميا • ∎

٤ــ١ــ٨ المجموعة المتعامدة المنظمة الكلية

توجد في كل فضــاء لهلبرت $H\neq\{0\}$ مجموعــة متعامــدة منظمــة كليــة (راجع البند ٣ــ٦) •

البرهــان :

لتكن M مجموعة كل المجموعات الجزئية المتعامــدة المنظمة في H • بمــا أن $H\neq\{0\}$ فانه يحوي عنصرا $x\neq 0$ ، كما تشكل $\{y\}$ مجموعة جزئية متعامدة منظمةفي H ،حيث $y=\|x\|^{-1}x$ • لذا فان $M\neq\varnothing$ •ان علاقةالاحتواء تعرف ترتيبا جزئيا على M • ولمــا كــان لكــل سلسلة C محتواة فــي M عنصر راجــح ، الا وهو اجتماع كل المجموعات الجزئية في X التي هي عناصر من C ، فانه يترتب على تمهيدية زورن انه يوجد لـ M عنصــر أعظمي F • وعندئذ نرى استنادا الــى المبرهنة ٣ــ٦ــ٢ أنه يوجد عنصر غير صفري z في H بحيث أن $z\perp F$ • وبالتالي فان المجموعة $F_1=F\cup\{e\}$ ، حيث $e=\|z\|^{-1}z$ متعامدة منظمة ، و F مجموعــة جزئية محتواة تماما في F_1 ، وهذا يناقض كون F عنصرا أعظميا •∎

مســائل

١ ــ تحقق من صحة الدعاوى في المثال ٤ــ١ــ٣ •

٢ ــ لتكن X مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة x علــى الفترة $[0,1]$ ، ولنفترض أن $x \leqq y$ تعني $x(t) \leqq y(t)$ أيا كان t من $[0,1]$ • بين أن هذا يعرف ترتيبا جزئيا • هل هو ترتيب كلي ؟ وهل يوجد لـ X عناصر أعظمية ؟

٣ ــ بين بأن مجموعة كل الاعــداد العقدية $z = x + iy$ و $w = u + iv$ ··· يمكــن ترتيبها جزئيا بافتراض أن $z \leqq w$ تعني أن $x \leqq u$ و $y \leqq v$ ، حيث تعنــي الاشارة $\leqq$ المعرفة على مجموعة الاعــداد الحقيقية اشارة التباين المألوفة عــلى R •

٤ ــ أوجد العناصر الاعظمية في M بالنسبة للترتيب الجزئي في المثال ٤ــ١ــ٥ ، حيــث M هــي :

(آ) $\{2, 3, 4, 8\}$ ، (ب) مجموعة كل الاعداد الاولية •

٥ ــ برهن بأنه يوجد للمجموعة A المرتبة جزئيا والمنتهية عنصر أعظمي واحــد على الاقل •

٦ ــ **(العنصر الاصغر ، العنصر الاكبر)** بين بأن كل مجموعة مرتبة جزئيا M يمكن أن يوجد فيها عنصر واحد على الاكثر a بحيث يكون $a \leqq x$ أيا كان x من M ، وعنصر واحد على الاكثر b بحيث يكون $x \leqq b$ أيا كان x من M• [اذا وجد العنصــر a (أو b) ، فاننــا نسميه **عنصرا أصغر** (أو **عنصرا أكبر** ، على الترتيب) للمجموعة M] •

٧ ــ **(العنصــر القاصــر)** يعــرف **العنصــر القاصــر** لمجموعــة جزئيــة غير خالية A من مجموعة مرتبة جزئيا M ، بأنه عنصر x من M بحيث يكون $x \leqq y$ أيــا كــان y من A • أوجد العناصــر الراجحــة والقاصــرة للمجموعة $A = \{4, 6\}$ في المثال ٤ــ١ــ٥ •

٨ ــ يعرف **الحد الادنى** لمجموعة جزئية غير خالية A من مجموعة مرتبة جزئيا M بأنــه عنصر قاصــر x للمجموعــة A بحيث يكــون $l \leqq x$ أيــا كــان العنصــر القاصــر l للمجوعــة A ، وتكتب عــادة $x = \text{g.l.b.}A = \inf A$• كذلك ، فاننا نعرف **الحد الاعلى** لـ A الذي نرمز اليه بـ $y = \text{l.u.b.}A = \sup A$

بأنه عنصر راجح y لـ A بحيث يكون $y \leqq u$ أيا كان العنصر الراجح u لـ A • (آ) اذا وجد للمجموعة A حد أدنى ، فبين أنه وحيد • (ب) حدد كلا من $\text{g.l.b.}\{A, B\}$ و $\text{l.u.b.}\{A, B\}$ في المثال ٤ـ١ـ٣ •

٩ ـ (**الشبكية**) • **الشبكية** هي مجموعة مرتبة جزئيا M بحيث يوجد لكل عنصرين x و y فيها .g.l.b (نرمز له بـ $x \wedge y$) و .l.u.b (نرمز له بـ $x \vee y$) • بين بأن المجموعة المرتبة جزئيا في المثال ٤ـ١ـ٣ هي شبكية ، حيث $A \wedge B = A \cap B$ ، $A \vee B = A \cup B$ •

١٠ـ يعرف **العنصر الاصغري** لمجموعة مرتبة جزئيا M بأنه عنصر x من M بحيث أن $y \leqq x$ تقتضي ان يكون $y = x$ • حدد كل العناصر الاصغرية في الشق (آ) من المسألة ٤ •

٤ـ٢ مبرهنة هان ـ باناخ

ان مبرهنة هان ـ باناخ هي مبرهنة في تحديد الداليات الخطية • وسنرى في البند القادم أن هذه المبرهنة تكفل وجود عدد وفير من الداليات الخطية المحدودة على فضاء منظم ، بحيث أننا نجد نظرية مناسبة للفضاءات الثنوية التي تشكل قسما أساسيا من النظرية العامة للفضاءات المنظمة • وفي هذا السياق تغدو مبرهنة هان ـ باناخ واحدة من أهم المبرهنات المتعلقة بالمؤثرات الخطية المحدودة• وفضلا عن ذلك ، فان دراستنا ستبين بأن هذه النظرية تحدد المدى الذي يمكن لقيم دالي خطي ادراكه • وقد تم اكتشاف هذه المبرهنة من قبل هـ• هان (١٩٢٧ م•) ، ثم أعاد اكتشافها ، ولكن بصفتها العامة الحالية ، س• باناخ (١٩٢٩ م•) ، ومن ثم عممها هـ بونبلاست وزوبشيك على الفضاءات المتجهية العقدية (١٩٣٨ م•) •

وبوجه عام ، ففي **مسائل التمديد** ، نأخذ شيئا رياضيا (تطبيقا مثلا) معرفا

على مجموعة جزئية Z من مجموعة معطاة X ، ومن ثم نمدد هذا الشيء من Z الى المجموعة X بأكملها بحيث تظل بعض الخواص الرئيسية للشيء سارية على الشيء الممـدد •

والشيء الذي تعالج مبرهنة هان ـ باناخ مسألة تمديده هو دالي خطي f معرف على فضاء جزئي Z من فضاء متجهي X ،بفرض أن f يتمتع بخاصة المحدودية التي سنعرفها بدلالة **الدالي الخطي جزئيا** ، وهو دالي حقيقي p معرف على فضاء متجهي X بحيث يتحقق الشرط (الذي يسمى شرط **الجمعية جزئيا**) •

أيا كان $x, y \in X$ $\qquad p(x+y) \leqq p(x)+p(y) \qquad$ (1)

والشرط (الذي يسمى شرط **التجانس ايجابا**) •

أيا كان $\alpha \geqq 0$ في $\mathbb{R}$ وأيا كان $x \in X$ $\qquad p(\alpha x)=\alpha p(x) \qquad$ (2)

(لاحظ بأن **النظيـم** على فضاء منظم هو دالي من هذا النوع) •

سنفترض أن قيم الدالي المعرف على Z الذي يطلب تمديده لا تتجاوز قيم دالي p معرف على X ، وسنحدد f من Z الى X دون أن يفقد صفة الخطيـة ودون أن يتجاوز قيم p ، وبالتالي سنمدد f الى دالـي $\bar{f}$ على X خطي وقيمه لا تتجاوز قيم p ، وهـذا هو جوهر المبرهنـة • سنفترض الآن أن X حقيقي ، وسنعالج في البند التالي تعميما للمبرهنة حين نفترض X فضاء متجها عقديا •

٤ـ٢ـأ مبرهنة هان ـ باناخ (تمديد الداليات الخطية)

ليكن X فضاء متجها حقيقيا و p داليا خطيا جزئيا على X • لنفترض كذلك أن f دالي خطي معرف على فضاء جزئي Z من X ويحقق الشرط

أيا كان x من Z $\qquad f(x) \leqq p(x) \qquad$ (3)

عندها يوجد لـ f ممدد خطي $\bar{f}$ من Z الى X يحقق الشرط

أيا كان x من X $\qquad \bar{f}(x) \leqq p(x) \qquad$ (3*)

اي أن $\bar{f}$ هو دالي خطي على X يحقق (3*) على X ويحقق المساواة $\bar{f}(x)=f(x)$ **ايـا كـان x مـن Z** •

البرهـان :

سننجز البرهان وفق الخطوات التالية :

(آ) نأخذ المجموعة E المؤلفة من كل الممددات الخطية g للدالي f والمحققة للشرط $g(x) \leqq p(x)$ على ساحتها $\mathfrak{D}(g)$ ، ونبين أن E يمكـن ترتيبها جزئيا وأن تمهيدية زورن تكفل وجود عنصر أعظمي $\hat{f}$ لـ E •

(ب) نثبت أن $\hat{f}$ معرف على الفضاء X بأكمله •

(جـ) نتحقق من علاقة مساعدة استخدمناها في (ب) •

لننتقل الآن الى اثبات الشق الاول •

(آ) لتكن E مجموعة كل الممددات الخطية g لـ f المحققة للشرط

$$g(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } \mathfrak{D}(g)$$

من الواضح أن $E \neq \varnothing$ ، ذلك أن $f \in E$ • يمكننا أن نعرف على E ترتيبا جزئيا حيـث

$g \leqq h$ تعني أن h هو ممدد لـ g

أي أن لدينا تعريفا $\mathfrak{D}(h) \supset \mathfrak{D}(g)$ و $h(x) = g(x)$ أيا كان x من $\mathfrak{D}(g)$ •

لنعرف من أجل أي سلسلة C محتواة في E الدالي $\hat{g}$ بالشكل

$$\hat{g}(x) = g(x) \qquad \text{اذا كان } x \in \mathfrak{D}(g) \qquad (g \in C).$$

ان $\hat{g}$ هو دالي خطي وساحته

$$\mathfrak{D}(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} \mathfrak{D}(g),$$

هي فضاء متجهي ، ذلك أن C سلسلة • ان تعريفنا $\hat{g}$ خال من الغموض ، ذلك أنه اذا كان $x \in \mathfrak{D}(g_1) \cap \mathfrak{D}(g_2)$ ، حيث $g_1, g_2 \in C$ ، فان $g_1(x) = g_2(x)$ نظرا لكون

C سلسلة ، وهذا يقتضي أن يكون $g_1 \leqq g_2$ أو $g_2 \leqq g_1$ • من الواضح أن $g \leqq \hat{g}$ أيا كان g من C • لذا فان $\hat{g}$ عنصر راجح لـ C • ولما كان $C \subset E$ اختياريا ، فان تمهيدية زورن تقتضي أن يوجد لـ E عنصر أعظمي $\bar{f}$ • واستنادا الى تعريف E ، فان $\bar{f}$ ممدد خطي لـ f يحقق الشرط

$$\bar{f}(x) \leqq p(x) \qquad x \in \mathfrak{D}(\bar{f}). \tag{4}$$

(ب) سنبين الآن أن $\mathfrak{D}(\bar{f})$ تساوي X بأكمله • لنفترض مؤقتا أن هذا غير صحيح • عندئذ يمكن أن نختار عنصرا y_1 من $X - \mathfrak{D}(\bar{f})$ ونأخذ الفضاء الجزئي Y_1 من X المولد بـ $\mathfrak{D}(\bar{f})$ و y_1 • لاحظ أن $y_1 \neq 0$ لان $0 \in \mathfrak{D}(\bar{f})$ • من الممكن كتابة أي عنصر x من Y_1 بالشكل

$$x = y + \alpha y_1 \qquad y \in \mathfrak{D}(\bar{f}).$$

ان هذا التمثيل وحيد ، ذلك أن المساواة $y + \alpha y_1 = \bar{y} + \beta y_1$ حيث $\bar{y} \in \mathfrak{D}(\bar{f})$ تقتضي المساواة $y - \bar{y} = (\beta - \alpha) y_1$ ، حيث $y - \bar{y} \in \mathfrak{D}(\bar{f})$ ، في حين أن $y_1 \notin \mathfrak{D}(\bar{f})$ ، وبالتالي فان الحل الوحيد هو $y - \bar{y} = 0$ ، وهذا يقتضي المساواة $\beta - \alpha = 0$ ، التي تعني الوحدانية •

سنعرف الدالي g_1 على Y_1 بالمساواة

$$g_1(y + \alpha y_1) = \bar{f}(y) + \alpha c \tag{5}$$

حيث c أي عدد حقيقي ثابت • من السهل اثبات خطية g_1 • كذلك ، فاذا كان $\alpha = 0$ ، فاننا نجد أن $g_1(y) = \bar{f}(y)$ • لذا فان g_1 هو **ممدد فعلي** لـ $\bar{f}$ بمعنى أنه ممدد بحيث تكون $\mathfrak{D}(\bar{f})$ هي مجموعة جزئية تماما من $\mathfrak{D}(g_1)$ • يترتب على هذا أنه اذا تمكنا من اثبات أن $g_1 \in E$ بالبرهان على أن

$$g_1(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } \mathfrak{D}(g_1) \tag{6}$$

فان هذا يناقض كون $\bar{f}$ عنصرا أعظميا ، وتكون الدعوى $\mathfrak{D}(\bar{f}) \neq X$ باطلة ، أي تكون الدعوى $\mathfrak{D}(\bar{f}) = X$ صحيحة •

(جـ) وهكذا يجب علينا في الختام اثبات أن g_1 ، لدى اختيار مناسب لـ c في (5) يحقق (6) •

لنأخذ أي y و z في $\mathfrak{D}(\bar{f})$ • نستنتج عندئذ من (4) و (1) أن

$$\begin{aligned}\bar{f}(y)-\bar{f}(z)=\bar{f}(y-z) &\leqq p(y-z)\\ &=p(y+y_1-y_1-z)\\ &\leqq p(y+y_1)+p(-y_1-z).\end{aligned}$$

وبنقل الحد الاخير الى اليسار والحد $\bar{f}(y)$ الى اليمين نجد أن

$$-p(-y_1-z)-\bar{f}(z)\leqq p(y+y_1)-\bar{f}(y), \tag{7}$$

حيث y_1 مثبت • وبما أن y لا يظهر في الطرف الايسر و z لا يظهر في الطرف الايمن ، فان اللامساواة تظل سارية اذا أخذنا الـ sup عندما تمسح z المجموعة $\mathfrak{D}(\bar{f})$ في الطرف الايسر (ولنطلق على العنصر الناتج m_0) ، واذا أخذنا الـ inf عندما تمسح y المجموعة $\mathfrak{D}(\bar{f})$ في الطرف الايمن ، ولنطلق على الناتج m_1 • وهكذا فان $m_0\leqq m_1$ ، واذا كان c يحقق الشرط $m_0\leqq c\leqq m_1$ ، فاننا نستنتج من (7) أن

$$-p(-y_1-z)-\bar{f}(z)\leqq c \qquad \text{أيا كان } z \text{ من } \mathfrak{D}(\bar{f}) \tag{8a}$$

$$c\leqq p(y+y_1)-\bar{f}(y) \qquad \text{أيا كان } y \text{ من } \mathfrak{D}(\bar{f}) \tag{8b}$$

سنثبت (6) أولا عندما يكون α سالبا في (5) ، ثم عندما يكون α موجبا • فاذا كان $\alpha<0$ فاننا نستعمل (8a) حيث نعوض z بالمقدار $\alpha^{-1}y$:

$$-p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)-\bar{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right)\leqq c.$$

ونجد بعد الضرب بـ $-\alpha>0$ أن

$$\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)+\bar{f}(y)\leqq-\alpha c.$$

نستنتج من هذا ومن (5) باستعمال $y+\alpha y_1=x$ (الواردة قبل قليل) صحة المتباينة المنشودة التالية

$$g_1(x)=\bar{f}(y)+\alpha c\leqq-\alpha p\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)=p(\alpha y_1+y)=p(x).$$

واذا كان $\alpha=0$ نجد أن $x\in\mathfrak{D}(\bar{f})$ ، وعندئذ لا يوجد ما يحتاج الى برهان • أما اذا كان $\alpha>0$ ، فاننا نجد باستخدام (8b) بعد تعويض y بـ $\alpha^{-1}y$ أن

$$c\leqq p\left(\frac{1}{\alpha}y+y_1\right)-\bar{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

ونجد بعد الضرب بـ $\alpha>0$ أن

$$\alpha c\leqq\alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y+y_1\right)-\bar{f}(y)=p(x)-\bar{f}(y).$$

نستنتج من هذا ومن (5) أن

$$g_1(x)=\bar{f}(y)+\alpha c\leqq p(x). \qquad \blacksquare$$

لنطرح السؤال عما اذا كان من الممكن اثبات المبرهنة السابقة دون اللجوء الى تمهيدية زورن•ان هذا السؤال هام،وبخاصة لان هذه التمهيديةلا تمدنا بطريقة في الانشاء • اذا أخذنا في (5) f بدلا من $\bar{f}$ ، فاننا نجد لكل عدد حقيقي c ممددا خطيا g_1 لـ f الى الفضاء الجزئي Z_1 المولد بـ $\mathfrak{D}(f)\cup\{y_1\}$ ، ويمكننا اختيار c بحيث أن $g_1(x)\leqq p(x)$ أيا كان x من Z_1، كما نرى من الشق (جـ) من البرهان عند استبدال $\bar{f}$ بـ f • فاذا كان $X=Z_1$ فالمشكلة تكون قد حلت • أما اذا كان $X\neq Z_1$ ، فيمكن أخذ $y_2\in X-Z_1$ ، وتكرار الطريقة لتمديد f الى Z_2 المولد بـ Z_1

و y_2 ، وهلم جراً • وبذا نتوصل الى متتالية من الفضاءات الجزئية Z_j ، كل منها يحوي سابقه ، وهي بحيث يمكن تمديد f خطيا من كل منها الى الذي يليه ، كما أن الممدد g_j يحقق الشرط $g_j(x) \leqq p(x)$ أيا كان x من Z_j • فاذا كان

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} Z_j,$$

فان المسألة تكون قد حلت بعد n من الخطوات ، واذا كان

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j,$$

فمن الممكن استعمال الاستقراء العادي • بيد أنه اذا لم يوجد لـ X مثل هـــذا التمثيل ، فلا مناص لنا من الاستعانة بتمهيدية زورن في البرهان الذي أوردناه •

وبالطبع ، فقد يكون الوضع بكامله أبسط في الحالات الخاصة • وفضاءات هلبرت من هذا النمط بسبب تمثيل ريس ٣ـــ٨ـــ١ ، وسندرس هذا في البنـــد التالـــي •

مســـائل

١ ـــ بين بأن القيمة المطلقة للدالي الخطي تتمتع بالخواص المعبر عنها بـ (1) و (2) •

٢ ـــ بين بأن النظيم على فضاء متجهي X هو دالي خطي جزئيا على X •

٣ ـــ بين بأن $p(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n$ حيث $x = (\xi_n) \in l^\infty$ و ξ_n حقيقي ، يحدد داليا خطيـــا جزئيـــا عـــلى l^∞ •

٤ ـــ بين بأن الدالي الخطي جزئيا p يحقق الشرطين $p(0) = 0$ و $p(-x) \geqq -p(x)$ •

٥ ـــ **(المجموعة المحدبة)** اذا كان p داليا خطيا جزئيا عـــلى فضاء خطي X ،

فبين أن { مثبت $M=\{x \mid p(x) \leqq \gamma,\ \gamma>0$ مجموعة محدبة (راجع البند ٣ـ٣) •

٦ ـ اذا كان p داليا وجمعيا جزئيا على فضاء منظم X ، وكان p مستمرا في النقطة 0 و $p(0)=0$ ، فبين أن p مستمر في كل x من X •

٧ ـ اذا كان p_1 و p_2 داليين خطيين جزئيا على فضاء متجهي X ، وكان c_1 و c_2 ثابتين موجبين ، فبين أن $p=c_1p_1+c_2p_2$ خطي جزئيا على X •

٨ ـ اذا كان دالي جمعيا جزئيا على فضاء منظم X وغير سالب خارج الكرة $\{x \mid \|x\|=r\}$ فبين أنه غير سالب في كل x من X •

٦ ـ ليكن p داليا خطيا جزئيا على فضاء متجهي حقيقي X • لنفترض f معرفا على المجموعة $Z=\{x \in X \mid x=\alpha x_0,\ \alpha \in \mathbf{R}\}$ بالدستور $f(x)=\alpha p(x_0)$ حيث x_0 عنصر مثبت من X • بين أن f دالي خطي على Z يحقق المتباينة $f(x) \leqq p(x)$ •

١٠ـ اذا كان p داليا خطيا جزئيا على فضاء متجهي حقيقي X ، فبين أن ثمة داليا خطيا $\tilde{f}$ على X بحيث أن $-p(-x) \leqq \tilde{f}(x) \leqq p(x)$ •

٤ـ٣ مبرهنة هان ـ باناخ في الفضاءات المتجهية العقدية والفضاءات المنظمة

تتعلق مبرهنة هان ـ باناخ ٤ـ٢ـ١ بالفضاءات المتجهية الحقيقية • وقد توصل ف• بونبلاست و أ• زوبشيك عام ١٩٣٨ م• الى تعميم يحوي الفضاءات المتجهية العقدية •

٤ـ٣ـ١ مبرهنة هان ـ باناخ (المعممة)

ليكن X فضاء متجها حقيقيا أو عقديا ، وليكن p داليا خطيا حقيقيا على X ، ولنفترض أن p جمعي جزئيا ، أي انه أيا كان x و y من X فان

$$p(x+y) \leqq p(x)+p(y) \qquad (1)$$

(كما في المبرهنة ٤ـ٢ـ١) ، ولنفترض كذلك أنه أيا كان العدد α فان

$$p(\alpha x)=|\alpha|\,p(x). \qquad (2)$$

لنفترض كذلك أن f دالي خطي معرف على فضاء جزئي Z من X ويحقق الشرط

أيا كان x من Z $\qquad |f(x)|\leqq p(x) \qquad (3)$

عندئذ يوجد لـ f ممدد خطي $\tilde{f}$ من Z الى X يحقق الشرط

أيا كان x من X $\qquad |\tilde{f}(x)|\leqq p(x) \qquad (3^*)$

البرهـان :

(آ) حالة الفضاءات الحقيقية . اذا كان الفضاء X حقيقيا ، فان المسألة سهلة . عندئذ تقتضي (3) أن يكون $f(x)\leqq p(x)$ أيا كان x من Z . وبالتالي نجد اعتمادا على مبرهنة هان ــ باناخ ٤ـ٢ـ١ وجود ممدد خطي $\tilde{f}$ من Z الى X بحيث يكون

أيا كان x من X $\qquad \tilde{f}(x)\leqq p(x) \qquad (4)$

نستنتج من هذا ومن (2) أن

$$-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x)\leqq p(-x)=|-1|\,p(x)=p(x),$$

أي أن $\tilde{f}(x)\geqq -p(x)$. يترتب على هذا وعلى (4) صحة (3^*) .

(ب) حالة الفضاءات العقدية. ليكن X عقديا ، عندئذ يكون Z فضاء متجهيا عقديا كذلك . وبالتالي فان قيم f عقدية ، ويمكن كتابة المساواة

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x) \qquad x\in Z$$

حيث f_1 و f_2 حقيقيان . لننظر مؤقتا الى X و Z بأنهما فضاءان متجهيان حقيقيان، ولنرمز لهما بـ X_r و Z_r على الترتيب ، ان هذا يعني ببساطة أننا نقصر الضرب بالأعداد على الاعداد الحقيقية (بدلا من الاعداد العقدية) . وبما أن f خطـي

على Z ، وأن لـ f_1 و f_2 قيما حقيقية فان f_1 و f_2 داليان خطيان على Z_r • كذلك فان $f_1(x) \leqq |f(x)|$ نظرا لكون القسم الحقيقي من عدد عقدي لا يتجاوز قيمتـه المطلقة • لذا فاننا نجد استنادا الى (3) أن

$$f_1(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } Z_r$$

واعتمادا على مبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٢ــ١ ، فانه يوجد ممدد خطي $\bar{f}_1$ لـ f_1 من Z_r الى X_r بحيث يكون

$$\bar{f}_1(x) \leqq p(x) \qquad \text{أيا كان } x \text{ من } X_r \tag{5}$$

لننتقل الى f_2 بعد أن درسنا f_1 • فاذا عدنا الى Z باستعمال $f = f_1 + if_2$ ، فاننا نجد المساواة التالية أيا كان x من Z

$$i[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

وبمطابقة القسمين الحقيقيين في الطرفين نجد أن

$$f_2(x) = -f_1(ix) \qquad x \in Z. \tag{6}$$

لذا ، فاننا اذا وضعنا المساواة أيا كان x من X

$$\bar{f}(x) = \bar{f}_1(x) - i\bar{f}_1(ix) \qquad x \in X, \tag{7}$$

فاننا نجد من (6) أن $\bar{f}(x) = f(x)$ على Z ، وهذا يبين أن $\bar{f}$ ممدد لـ f من Z الى X • بقي علينا اثبات ما يلي :

(i) $\bar{f}$ دالي خطي على الفضاء المتجهي **العقدي** X •

(ii) $\bar{f}$ يحقق (*3) على X •

أما صحة (i) ، فأمر يمكن رؤيته من الحسابات التالية التي تعتمد على (7) وعلى خطية $\bar{f}_1$ على الفضاء المتجهي الحقيقي X_r ، ونفترض هنا أن $a+ib$ أي عـدد

عقدي حيث a و b حقيقيان :

$$\begin{aligned}\tilde{f}((a+ib)x) &= \tilde{f}_1(ax+ibx) - i\tilde{f}_1(iax-bx)\\ &= a\tilde{f}_1(x)+b\tilde{f}_1(ix)-i[a\tilde{f}_1(ix)-b\tilde{f}_1(x)]\\ &= (a+ib)[\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix)]\\ &= (a+ib)\tilde{f}(x).\end{aligned}$$

سنثبت الآن صحة (ii) • نلاحظ أنه أيا كان x الـذي يحقق المساواة $\tilde{f}(x)=0$ ، فان (ii) صحيحة لكون $p(x)\geqq 0$ وفق (1) و (2) ، راجع كذلك المسألة ١ • لنفترض الآن x الذي يحـقق الشرط $\tilde{f}(x)\neq 0$ • عندئذ يمكـن أن نكتب مستعملين الصيغة القطبية للمقادير العقدية ما يلي :

$$\tilde{f}(x)=|\tilde{f}(x)|e^{i\theta} \quad \text{وهكـذا فـان} \quad |\tilde{f}(x)|=\tilde{f}(x)e^{-i\theta}=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$$

وبما أن $|\tilde{f}(x)|$ حقيقي ، فـان العبارة الاخيرة حقيقية ، وهـي بالتالي تساوي قسمها الحقيقي • لذا يترتب على (2) أن

$$|\tilde{f}(x)|=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)\leqq p(e^{-i\theta}x)=|e^{-i\theta}|\,p(x)=p(x).$$

وبذا يكتمل البرهان •∎

وعلى الرغم من أن مبرهنة هان ـ باناخ لا تنص مباشرة على الاستمرار ، فثمة تطبيق رئيسي لهذه المبرهنة يتعلق بالداليات الخطية والمحدودة• وهذا يعيدنا الى الفضاءات المنظمة التي تقع في مركز اهتمامنا • وفعلا ، فان المبرهنة ٤ـ٣ـ١ تقتضي المبرهنة الاساسية التالية :

٤ـ٣ـ٢ مبرهنة هان ـ باناخ (الفضاءات المنظمة)

ليكن f داليا خطيا ومحدودا على فضاء جزئي Z من فضاء منظم X • عندئذ يوجد دالي خطي محدود $\tilde{f}$ على X يشكل ممددا لـ f الى X وله النظيم نفسه

$$\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z \qquad (8)$$

حيث

$$\|\bar{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\bar{f}(x)|, \qquad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

(وحيث $\|f\|_Z = 0$ في الحالة التافهة $Z = \{0\}$) .

البرهان :

اذا كان $Z = \{0\}$ ، فان $f = 0$ ، ويكون الممدد $\bar{f} = 0$. لنفترض الآن أن $Z \neq \{0\}$. اذا أردنا الاستعانة بالمبرهنة ٤ـ٣ـ١ ، فلا بد لنا من اكتشاف p مناسب . لدينا أيا كان x من Z المتباينة

$$|f(x)| \leqq \|f\|_Z \, \|x\|.$$

وهي من النمط (3) ، حيث

$$p(x) = \|f\|_Z \, \|x\|. \tag{9}$$

من الواضح أن p معرفة على X بأكمله . كذلك ، فان p تحقق (1) على X ، ذلك أنه يترتب على متباينة المثلث أن

$$p(x+y) = \|f\|_Z \, \|x+y\| \leqq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

ان p تحقق أيضا (2) على X لان

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \, \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|f\|_Z \, \|x\| = |\alpha| \, p(x).$$

وبالتالي فمن الممكن تطبيق المبرهنة ٤ـ٣ـ١ واستنتاج وجود دالي خطي $\bar{f}$ على X هو ممدد لـ f ويحقق التالي :

$$|\bar{f}(x)| \leqq p(x) = \|f\|_Z \, \|x\| \qquad x \in X.$$

وبأخذ الـ sup عندما يمسح x كل عناصر X التي نظيمها 1 ، فاننا نجد المتباينة

$$\|\bar{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\bar{f}(x)| \leqq \|f\|_Z.$$

ولما كان النظيم لا يمكن أن يتناقص لدى التمديد ، فاننا نجد أيضا أن $\|\bar{f}\|_X \geqq \|f\|_Z$ • نستنتج من هذه المتباينة وسابقتها أن (8) صحيحة ، وبهذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة •∎

هذا وقد يغدو الوضع سهلا جداً في بعض الحالات الخاصة ، وفضاءات هلبرت هي واحدة من هذه الحالات • وفعلا ، فاذا كان Z فضاء جزئيا مغلقا من فضاء هلبرت $X=H$ ، فانه يوجد لـ f تمثيل ريس ٣ـ٨ـ١ ، وليكن

$$f(x) = \langle x, z \rangle \qquad\qquad z \in Z$$

حيث $\|f\| = \|z\|$ • وبالطبع ، فلما كان الجداء الداخلي معرفا على H بأكمله ، فان هذا يعطي حالا ممددا خطيا $\bar{f}$ لـ f من Z الى H ، ويكون لـ $\bar{f}$ النظيم نفسه الذي لـ f ، ذلك أن $\|\bar{f}\| = \|z\| = \|f\|$ استنادا الى المبرهنة ٣ـ٨ـ١ • لذا فان التمديد في هذه الحالة مباشر •

سنشتق الآن من المبرهنة ٤ـ٣ـ٢ نتيجة مفيدة أخرى يمكن القول بأنها تبين بأن الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X يتألف من عدد كبير بقدر كاف من الداليات الخطية المحدودة للتمييز بين نقاط X • ان هذا يغدو أساسيا فيما يتعلق بالمؤثرات المترافقة (البند ٤ـ٥) وما يسمى بالتقارب الضعيف (البند ٤ـ٨) •

٤ـ٣ـ٣ مبرهنة (الداليات الخطية المحدودة)

ليكن X فضاء منظما ، وليكن $x_0 \neq 0$ أي عنصر من X • عندئذ يوجد دالي خطي وحيد $\tilde{f}$ على X بحيث يكون

$$\|\bar{f}\| = 1, \qquad \bar{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

البرهـــان :

سنأخذ الفضاء الجزئي Z من X المؤلف من جميع العناصر $x = \alpha x_0$ بفرض عددا ما ؛ لنعرف على Z داليا خطيا f كما يلي :

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|. \tag{10}$$

ان f محدود ونظيمه $\|f\| = 1$ لان

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|.$$

ان المبرهنة ٤ــ٣ــ٢ تقتضي وجود ممدد خطي f لـ $\bar{f}$ من Z الى X نظيمـــه $\|\bar{f}\| = \|f\| = 1$ ؛ ونرى بالنظر الى (10) أن $\bar{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$ ؛ ∎

٤ــ٣ــ٤ نتيجة (النظيم ، المتجه الصفري)

ايا كان x من الفضاء المنظم X فان

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \tag{11}$$

لذا فانه اذا كان x_0 محققا للمساواة $f(x_0) = 0$ أيا كان f من X' فان $x_0 = 0$ ؛

البرهـــان :

نستنتج من المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ لدى كتابة x بدلا من x_0 أن

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqq \frac{|\bar{f}(x)|}{\|\bar{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|,$$

كما نستنتج من المتباينة $|f(x)| \leqq \|f\| \|x\|$ أن

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqq \|x\|. \qquad ∎$$

مســائل

١ ـ (**نصف النظيم**) • بين بأن (1) و (2) يقتضيان $p(0)=0$ و $p(x)\geqq 0$ ، أي أن p هو نصف نظيم (راجع المسألة ١٢ من البند ٢ــ٣) •

٢ ـ بين بأن (1) و (2) يقتضيان $|p(x)-p(y)|\leqq p(x-y)$ •

٣ ـ لقد بينا أن $\tilde{f}$ المحدد بـ (7) هو دالي خطي على الفضاء المتجهي **العقدي** X • أثبت أنه يكفي للوصول الى هذا البرهان على أن $\tilde{f}(ix)=i\tilde{f}(x)$ •

٤ ـ ليكن p معرفا على فضاء متجهي X ويحقق الشرطين (1) و (2) • بين بأنه اذا كان x_0 أي عنصر معطى في X ، فهنالك دالي خطي $\tilde{f}$ على X بحيث أن $\tilde{f}(x_0)=p(x_0)$ وأن $|\tilde{f}(x)|\leqq p(x)$ أيا كان x من X •

٥ ـ اذا كان X في المبرهنة ٤ــ٣ــ١ فضــاء منظما وكان $p(x)\leqq k\|x\|$ حيث k عــدد موجــب ، فبين أن $\|\tilde{f}\|\leqq k$ •

٦ ـ لايضاح المبرهنة ٤ــ٣ــ٢ نأخذ داليا f على الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^2$ معرفــا بالمساواة $f(x)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$ حيث $x=(\xi_1, \xi_2)$ • أوجد ممدداته $\tilde{f}$ الى $\mathbf{R}^3$ والنظائــم الموافقــة •

٧ ـ قدم برهانا آخر للمبرهنة ٤ــ٣ــ٣ في حالة فضاء هلبرت •

٨ ـ ليكن X فضاء منظما و X' فضاءه الثنوي • فاذا كان $X\neq\{0\}$ ، بــين أن X' لا يمكن أن يكون $\{0\}$ •

٩ ـ بين أنه في حالة فضاء منظم فصول X ، فمن الممكن اثبات المبرهنة ٤ــ٣ــ٢ مباشرة دون اللجوء الى تمهيدية زورن (التي استعملناها بصورة مباشرة ، وذلك في اثبات المبرهنة ٤ــ٢ــ١) •

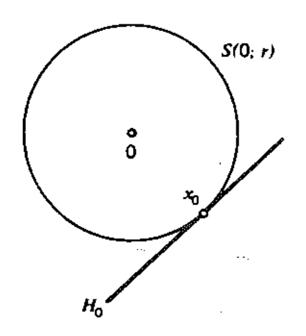
١٠ـ توصل الى الدعوى الثانية في ٤ــ٣ــ٤ مباشرة من ٤ــ٣ــ٣ •

١١ـ اذا كان $f(x)=f(y)$ أيا كان الدالي الخطي المحدود f على فضاء منظم X ، فبين أن $x=y$ •

١٢ــ لايضاح المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ ، افترض أن X المستوي الاقليدي $\mathbf{R}^2$ ، وأوجد الدالــي f •

١٣ــ أثبت أنه في حدود الافتراضات في المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ ، فانه يوجد دالــي خطي محدود f على X بحيث أن $\|f\|=\|x_0\|^{-1}$ وأن $f(x_0)=1$ •

١٤ــ (**فوق المستوي**) • بــين بأنــه لكل قشرة كروية $S(0;r)$ في فضــاء منظم X وكل نقطة $x_0 \in S(0;r)$ يوجد فوق مستوٍ H_0 يحوي x_0 بحيث تقع الكرة $\bar{B}(0;r)$ بكاملها في واحد مــن نصفي الفضاء المحددين بـ H_0 • (راجــع المسألتين ١٢ و ١٥ من البند ٢ــ٨) • ويعطي الشكل ٣٩ ايضاحا بسيطا لهــذا الامــر •



الشكل (٣٩) • ايضاح المسالة ١٤ في حالة المستوي الاقليدي $\mathbf{R}^2$

٤ــ٤ تطبيق على الداليات الخطية المحدودة على $C[a,b]$

لمبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٣ــ٢ تطبيقات هامة عديدة ، قدمنا واحدا منها في البند السابق ؛ وسنورد تطبيقا آخر في هذا البند • وسنستعين بالمبرهنة ٤ــ٣ــ٢ للحصول على دستور يتعلق بالتمثيل العام للداليات الخطية المحدودة على $C[a,b]$ ، حيث $[a,b]$ فترة متراصة مثبتة • وقد سبق وشرحنا في نهاية البند ٢ــ١٠ أهمية

التمثيلات العامة للداليات على فضاءات خاصة • وبما أن التمثيل الذي نعنى به الآن سيكون بدلالة تكامل ريمان ـ ستيلجس ، فاننا نجد من المناسب التذكير بتعريف عدد قليل من خواص هذا التكامل ، الذي هو تعميم لتكامل ريمان المعروف • سنبتديء بالمفهوم التالي :

نقول عن دالة w معرفة على $[a, b]$ انها **تغير محدود** على $[a, b]$ اذا كان **تغيرها الكلي** $\text{Var}(w)$ على $[a, b]$ منتهيا ، حيث

$$\text{Var}(w) = \sup \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})|, \tag{1}$$

حيث يؤخذ الـ sup على كل **التجزئات**

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{2}$$

للفترة $[a, b]$ • ان n هنا هو كيفي ، وكذلك اختيار القيم $t_1, \ldots, t_{n-1}$ في $[a, b]$ التي يجب عليها أن تحقق (2) •

من الواضح أن كل الدوال ذات التغير المحدود على $[a, b]$ تشكل فضاء متجهيا ، ويعرف النظيم على هذا الفضاء بالدستور

$$\|w\| = |w(a)| + \text{Var}(w). \tag{3}$$

ويرمز للفضاء المنظم المعرف بهذا الشكل بـ $BV[a, b]$ ، حيث يمثل B الحرف الاول من كلمة bounded (أي محدود) ، و V الحرف الاول من كلمة variation (أي تغير) •

سنجد الآن مفهوم تكامل ريمان ـ ستيلجس على النحو التالي : ليكن $x \in C[a, b]$ و $w \in BV[a, b]$ • لنفترض أن P_n تجزئة ما لـ $[a, b]$ معطاة بـ (2) ، ولنرمز بـ $\eta(P_n)$ الى طول أكبر فترة $[t_{j-1}, t_j]$ ، أي أن

$$\eta(P_n) = \max (t_1 - t_0, \cdots, t_n - t_{n-1}).$$

لنقابل كل تجزئة P_n لـ $[a, b]$ بالمجموع

$$s(P_n)=\sum_{j=1}^{n} x(t_j)[w(t_j)-w(t_{j-1})]. \tag{4}$$

يوجد عدد $\mathcal{J}$ يتمتع بخاصة أنه اذا كان ε عددا موجبا ما ، فثمة عدد موجب δ بحيث أن

$$\eta(P_n)<\delta \tag{5}$$

تقتضي أن يكون

$$|\mathcal{J}-s(P_n)|<\varepsilon. \tag{6}$$

يدعى $\mathcal{J}$ تكامل **ريمان ـ ستيلجس** لـ x على $[a, b]$ بالنسبة الى w ويرمز له بـ

$$\int_a^b x(t)\, dw(t). \tag{7}$$

لذا فمن الممكن الحصول على (7) كنهاية المجاميع (4) لمتتالية (P_n) من تجزئات $[a, b]$ التي تحقق $\eta(P_n) \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

لاحظ أنه اذا كان $w(t)=t$ فان التكامل (7) هو تكامل ريمان المعروف لـ x على $[a, b]$.

كذلك ، فاذا كانت x مستمرة ، ووجد لـ w مشتق كمول على $[a, b]$ فان

$$\int_a^b x(t)\, dw(t)=\int_a^b x(t)w'(t)\, dt \tag{8}$$

حيث تعني ' الاشتقاق بالنسبة الى t .

ان التكامل (7) دالة خطية لـ $x \in C[a, b]$ ، أي أنه اذا كان $x_1, x_2 \in C[a, b]$ و α و β أي عددين فان

$$\int_a^b [\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]\, dw(t)=\alpha\int_a^b x_1(t)\, dw(t)+\beta\int_a^b x_2(t)\, dw(t).$$

ان التكامل دالة خطية أيضا لـ $w \in BV[a, b]$ ؛ أي أنه اذا كان $w_1, w_2 \in BV[a, b]$ وكان γ و δ أي عددين فان

$$\int_a^b x(t)\, d(\gamma w_1 + \delta w_2)(t) = \gamma \int_a^b x(t)\, dw_1(t) + \delta \int_a^b x(t)\, dw_2(t).$$

سنحتاج أيضا الى المتباينة

$$\left| \int_a^b x(t)\, dw(t) \right| \leqq \max_{t \in J} |x(t)|\, \mathrm{Var}(w), \tag{9}$$

حيث $J = [a, b]$ • نلاحظ بأن هذا يعمم دستورا معروفا في علم التفاضل والتكامل• وفي الحقيقة ، فاذا كان $w(t) = t$ فان $\mathrm{Var}(w) = b - a$ ، وعندئذ تغدو (9) بالشكل

$$\left| \int_a^b x(t)\, dt \right| \leqq \max_{t \in J} |x(t)|\, (b - a).$$

يمكن بعد هذا صياغة مبرهنة التمثيل للداليات الخطية المحدودة على $C[a, b]$ التي توصل اليها ريس عام ١٩٠٩ على النحو التالي :

٤ــ٤ــ١ مبرهنة ريس (الداليات على $C[a, b]$)

كل دالي خطي محدود f على $C[a, b]$ يمكن تمثيله بتكامل ريمانــستيلجس

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dw(t) \tag{10}$$

حيث w ذو تغير محدود على $[a, b]$ وتغيره الكلي هو

$$\mathrm{Var}(w) = \|f\|. \tag{11}$$

البرهــان :

نرى من مبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٣ــ٢ المتعلقة بالفضاءات المنظمة أنه يوجد لـ f ممدد $\tilde{f}$ من $C[a, b]$ الى الفضاء المنظم $B[a, b]$ المؤلف مــن كــل الدوال المحدودة على $[a, b]$ حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)| \qquad J = [a, b].$$

وفضلا عن ذلك ، فانه يترتب على هذه المبرهنة أن الدالي الخطي $\bar{f}$ محدود وله نظيم f نفسه ، أي أن

$$\|\bar{f}\| = \|f\|.$$

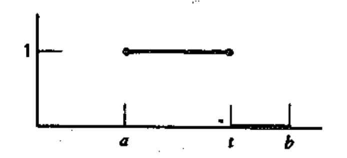
سنعرّف دالة w نحتاجها في (10) • ولهذا نأخذ الدالة x_t المبينة في الشكل (٤٠) • هذه الدالة معرفة على $[a, b]$ وقيمتها تساوي 1 على $[a, t]$ وتساوي 0 فيما عدا ذلك ، ومن الواضح أن $x_t \in B[a, b]$ • تسمى x_t **الدالة المميزة** للفترة $[a, t]$ • وبالاستعانة بـ x_t والدالي $\bar{f}$ ، فاننا نعرف w على $[a, b]$ بالشكل

$$w(a) = 0 \qquad w(t) = \bar{f}(x_t), \qquad t \in (a, b].$$

سنبين أن هذه الدالة w ذو تغير محدود وأن $\mathrm{Var}(w) \leqq \|f\|$ •

سنستعمل للمقادير العقدية الصيغة القطبية • وفي الحقيقة ، فاذا وضعنا $\theta = \arg \zeta$ فانه يمكننا كتابة التالي

$$\zeta = |\zeta|\, e(\zeta) \qquad \text{حيث} \qquad e(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \zeta = 0 \\ e^{i\theta} & \text{if } \zeta \neq 0. \end{cases}$$



الشكل (٤٠) • الدالة x_t

نلاحظ أنه اذا كان $\zeta \neq 0$ ، فان $|\zeta| = \zeta / e^{i\theta} = \zeta e^{-i\theta}$ • وبالتالي فانه أيا كان ζ ، سواء أكان صفريا أم لم يكن ، نجد

$$|\zeta| = \zeta\, \overline{e(\zeta)}, \tag{12}$$

حيث يرمز ـــ الى المرافق العقدي كما هو مألوف • وبقصد تبسيط الدساتير اللاحقة فاننا سنفترض أيضا أن

$$\varepsilon_j = \overline{e(w(t_j) - w(t_{j-1}))}$$

وأن $x_{t_j} = x_j$ ، الامر الذي يجنبنا كتابة أدلة الادلة • عندئذ يترتب على (12) أنه أيا كانت التجزئة (2) فاننا نجد أن

$$\sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| = |\bar{f}(x_1)| + \sum_{j=2}^{n} |\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})|$$

$$= \varepsilon_1 \bar{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j [\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})]$$

$$= \bar{f}\left(\varepsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j [x_j - x_{j-1}]\right)$$

$$\leqq \|\bar{f}\| \left\|\varepsilon_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j [x_j - x_{j-1}]\right\|.$$

إن $\|\bar{f}\| = \|f\|$ في الطرف الايمن (راجع ما سبق) ، كمـــا أن العامل $\|\cdots\|$ يساوي 1 ذلك أن $|\varepsilon_j| = 1$ ، وأننا نستنتج من تعريف x_j أنه اذا كان $t \in [a, b]$ فان واحدا فقط من الحدود x_1 و $x_2 - x_1$, . . . غير صفري (ونظيمه يساوي 1) • يمكننا الآن أن نأخذ الى sup في الطرف الايسر علـــى كـــل تجزئات $[a, b]$ ، وعندئذ نجد أن

$$\text{Var}(w) \leqq \|f\|. \tag{13}$$

لذا فان w ذو تغير محدود على $[a, b]$ •

سنثبت الآن صحة (10) ، حيث $x \in C[a, b]$ • لنعرف لكل تجزئة P_n لـ (2) دالة ؛ نرمز اليها اختصارا بـ z_n [بدلا من $z(P_n)$ أو z_{P_n} مثلا] ، محتفظين في ذاكرتنا أن z_n تعتمد على P_n ، وليس على n فقط • ان دستور التعريف هو

$$z_n = x(t_0)x_1 + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[x_j - x_{j-1}]. \tag{14}$$

عندئذ يكون $z_n \in B[a, b]$ • ونجد استنادا الى تعريف w أن

$$\bar{f}(z_n) = x(t_0)\bar{f}(x_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[\bar{f}(x_j) - \bar{f}(x_{j-1})]$$

$$= x(t_0)w(t_1) + \sum_{j=2}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})] \tag{15}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})],$$

حيث تنتج المساواة الاخيرة من أن $w(t_0) = w(a) = 0$ • نختار الآن أي متتالية (P_n) من التجزئات لـ $[a, b]$ بحيث أن $\eta(P_n) \longrightarrow 0$ ، [راجع (5)] • (لاحظ أن الأعداد t_j في (15) تعتمد على P_n ، وهذه حقيقة تحتفظ بها في ذاكرتنا دون التعبير عنها برموز أكبر ، مثل الرمز $t_{j,n}$) • نرى أنه عندما $n \longrightarrow \infty$ فان المجموع في الطرف الايمن من (15) يقترب من التكامل الوارد في (10) ، وبالتالي فان (10) صحيحة شريطة أن يكون $\bar{f}(z_n) \longrightarrow \bar{f}(x)$ ، حيث $\bar{f}(x)$ يساوي $f(x)$ لان $x \in C[a, b]$ •

سنبين بأن $\bar{f}(z_n) \longrightarrow \bar{f}(x)$ • فاذا أعدنا الى الذاكرة تعريف x_t (أنظر الى الشكل ٤٠) ، فاننا نرى بأنه يترتب على (14) أن $z_n(a) = x(a) \cdot 1$ نظرا لكون المجموع في (14) صفرا عندما $t = a$ • اذن $z_n(a) - x(a) = 0$ • وفضلا عن ذلك ، فانه يترتب على (14) أنه اذا كان $t_{j-1} < t \leqq t_j$ فاننا نجد عندئذ أن $z_n(t) = x(t_{j-1}) \cdot 1$ أنظر الى الشكل ٤٠ • وبالتالي فاننا نجد لهذه الاعداد t أن

$$|z_n(t) - x(t)| = |x(t_{j-1}) - x(t)|.$$

لذا فانه اذا كان $\eta(P_n) \longrightarrow 0$ ، فان $\|z_n - x\| \longrightarrow 0$ • لان x مستمرة على $[a, b]$ ، وبالتالي منتظمة الاستمرار على $[a, b]$ نظرا لكون $[a, b]$ متراصة • اذن فان استمرار $\bar{f}$ يقتضي الآن أن $\bar{f}(z_n) \longrightarrow \bar{f}(x)$ ، وبالتالي فان $\bar{f}(x) = f(x)$ ، ونكون بذلك قد أثبتنا صحة (10) •

سنثبت أخيرا صحة (11) • نستنتج من (10) و (9) أن

$$|f(x)| \leqq \max_{t \in J} |x(t)| \operatorname{Var}(w) = \|x\| \operatorname{Var}(w).$$

وبأخذ الـ sup على كل الدوال x في $C[a, b]$ التي نظيمها ، فاننا نجـد أن $\|f\| \leqq \operatorname{Var}(w)$ • وبضم هذه المتباينة الى (13) نجد (11) • ▮

نلاحظ أن w في المبرهنة ليست وحيدة ؛ الا أنه يمكن جعلها وحيدة بفرض شروط تجعل من w صفرا في النقطة a ومستمرا من اليمين :

$$w(a) = 0, \qquad w(t+0) = w(t) \qquad (a < t < b).$$

لمزيد من التفاصيل ؛ راجع الصفحات من 197 -'200 من كتاب

Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis.* New York: Wiley

والصفحة 111 من كتاب

Riesz, F., and B. Sz.-Nagy (1955), *Functional Analysis.* New York: Ungar

ومن الطريف أن مبرهنة ريـس ساهمت فيما بعـد كنقطة انطلاق للنظرية الحديثة في المكاملة • ولمزيد من الملاحظات التاريخية راجع الصفحة 169 من كتاب

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. III à V. Paris: Hermann

٤ـ٥ المؤثر المرافق

يمكننا أن نقرن بكل مؤثر خطي ومحدود $T: X \longrightarrow Y$ على فضاء منظم X ما يسمى بالمؤثر المرافق $T^{\times}$ لـ T • ومن دواعي الاهتمام بـ $T^{\times}$ استعمالاته في حل معادلات تحوي مؤثرات ، الامر الذي سنراه في البند ٨ـ٥ ، وتبرز مثل هـذه المعادلات على سبيل المثال في الفيزياء وفي تطبيقات أخرى • سنعرف في هـذا البند المؤثر المرافق $T^{\times}$ ونبحث في بعض خواصه ، بما فيها علاقته بمؤثـر هلبرت

المرافق(*) T^* الذي سبق وعرفناه في البند ٣ـ٩ • ومن المهم الملاحظة بأن دراستنا الحالية تعتمد على مبرهنة هان ـ باناخ (من خلال المبرهنة ٤ـ٣ـ٣) ، وأننا لن تتمكن من المضي بعيدا بمعزل عنها •

ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءان منظمان ، ولنحدد المؤثر المرافق $T^{\times}$ لـ T • لهذا ننطلق من أي دالي خطي محدود g على Y • من الواضح أن g معرف أيا كان y من Y • فاذا وضعنا $y = Tx$ ، فاننا نجد داليا على X ، نرمز له بـ f :

$$f(x) = g(Tx) \qquad x \in X. \tag{1}$$

ان f خطي نظرا لكون g و T خطيين • كذلك ، فان f محدود لان

$$|f(x)| = |g(Tx)| \leqq \|g\| \|Tx\| \leqq \|g\| \|T\| \|x\|.$$

فاذا أخذنا الـ sup على كل العناصر x من X التي نظيمها 1 ، فاننا نجد المتباينة

$$\|f\| \leqq \|g\| \|T\|. \tag{2}$$

وهذايبين أن $f \in X'$ ، حيث X' هو الفضاء الثنوي لـ X المعرف في ٢ـ١٠ـ٣ • ولما كان $g \in Y'$ فرضا ، فان الدستور (1) يعرف **للمتغير** g من Y' مؤثرا من Y' في X' يسمى **المؤثر المرافق** لـ T ، ويرمز له بـ $T^{\times}$ • لذلك نجد أن

---

* في حالة فضاءات هلبرت ، فان المؤثر المرافق $T^{\times}$ **ليس** مطابقا لمؤثر هلبرت المرافق T^* لـ T (رغم أنه عندئذ يكون $T^{\times}$ و T^* مرتبط احدهما بالآخر كما سنرى فيما بعد في هذا البند) . ان النجمة * التي نشير بها الى مؤثر هلبرت المرافق تستعمل في جميع الكتب تقريبا للدلالة على هذا المؤثر . لذا **فلا** يجوز الدلالة على المؤثر المرافق بـ T^* لانه أمر مزعج أن نستعمل رمزا يدل على شيء في فضاء هلبرت وعلى شيء آخر في نظرية الفضاءات المنظمة العامة. لذا سنستعمل $T^{\times}$ للدلالة على المؤثر المرافق ، ونفضله على الرمز الاقل دلالة T' والمستعمل ايضا في بعض الكتب .

$$X \xrightarrow{T} Y$$

(3)

$$X' \xleftarrow{T^{\times}} Y'$$

لاحظ بامعان أن $T^{\times}$ مؤثر معرف على Y' ،في حين أن المؤثـر المعطى T معـرف عـلى X • سنلخص ما سبق فيما يلي :

٤ـ٥ـ١ تعريف (المؤثر المرافق $T^{\times}$)

ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءان منظمان • عندئذ نعرف المؤثر المرافق $T^{\times}: Y' \longrightarrow X'$ بالشكل

$$f(x) = (T^{\times} g)(x) = g(Tx) \qquad (g \in Y') \tag{4}$$

حيث X' و Y' الفضاءان الثنويان لـ X و Y على الترتيب •

إن أول أهدافنا يكمن في اثبات أن للمؤثر المرافق نظيم المؤثر نفسه ، وهذه خاصة رئيسية كما سنرى فيما بعد • سنحتاج في البرهان الى المبرهنة ٤ـ٣ـ٣ التي نتجت من مبرهنة هان ـ باناخ • وهكذا فان مبرهنة هان ـ باناخ حيوية في صدد انشاء نظرية مرضية للمؤثرات المرافقـة ، التي تشكل بدورها جـزءا أساسيا من النظرية العامة للمؤثرات الخطية •

٤ـ٥ـ٢ مبرهنة (نظيم المؤثر المرافق)

ان المؤثر المرافق $T^{\times}$ في التعريف ٤ـ٥ـ١ خطي ومحدود ، كما ان

$$\|T^{\times}\| = \|T\|. \tag{5}$$

البرهـان :

ان المؤثر $T^{\times}$ خطي لان ساحته Y' فضاء متجهي ولاننا نجد مباشرة أن

$$
\begin{aligned}
(T^{\times}(\alpha g_1+\beta g_2))(x) &= (\alpha g_1+\beta g_2)(Tx) \\
&= \alpha g_1(Tx)+\beta g_2(Tx) \\
&= \alpha(T^{\times} g_1)(x)+\beta(T^{\times} g_2)(x).
\end{aligned}
$$

سنثبت صحة (5) • لدينا استنادا الى (4) أن $f=T^{\times}g$ ، وعندئذ يترتب على (2) أن

$$\|T^{\times}g\|=\|f\|\leqq\|g\|\,\|T\|.$$

وبأخذ الـ sup على كل العناصر g من Y' التي نظيمها 1 ، فاننا نجد المتباينة

$$\|T^{\times}\|\leqq\|T\|. \tag{6}$$

لذا فانه للحصول على (5) ، علينا أن نثبت الآن أن $\|T^{\times}\|\geqq\|T\|$ • ان المبرهنة ٤ــ٣ــ٣ تقتضي أنه يوجد لكل عنصر x_0 من X عنصر g_0 من Y' بحيث يكون

$$\|g_0\|=1 \qquad \text{و} \qquad g_0(Tx_0)=\|Tx_0\|.$$

لدينا هنا $g_0(Tx_0)=(T^{\times}g_0)(x_0)$ وفق تعريف المؤثر المرافق $T^{\times}$ • فاذا افترضنا أن $f_0=T^{\times}g_0$ ، نجد أن

$$
\begin{aligned}
\|Tx_0\| = g_0(Tx_0) &= f_0(x_0) \\
&\leqq \|f_0\|\,\|x_0\| \\
&= \|T^{\times}g_0\|\,\|x_0\| \\
&\leqq \|T^{\times}\|\,\|g_0\|\,\|x_0\|.
\end{aligned}
$$

ولما كان $\|g_0\|=1$ ، فاننا نجد لكل x_0 من X المتباينة

$$\|Tx_0\|\leqq\|T^{\times}\|\,\|x_0\|.$$

(وهذا يشمل الحالة $x_0 = 0$ لان $T0 = 0$) • لكن لدينا دوما

$$\|Tx_0\| \leqq \|T\| \, \|x_0\|,$$

كما أن $c = \|T\|$ هو هنا اصغر ثابت c بحيث تكون المتباينة $\|Tx_0\| \leqq c\|x_0\|$ صحيحة أيا كان x_0 من X • لذا فلا يمكن أن يكون $\|T^{\times}\|$ أصغر من $\|T\|$ ، أي أنـــه يجب أن يكون $\|T^{\times}\| \geqq \|T\|$ • يترتب على هذا بالاضافة الى (6) صحة (5) • ∎

لنشرح هــذه المناقشة بالاستعانة بالمصفوفات الممثلة للمؤثرات • ان هــذا سيعين القــارىء أيضا في ايراد أمثلة من عنده •

٤ــ٥ــ٢ مثال (المصفوفة)

من الممكن في الفضاء الاقليدي $\mathbf{R}^n$ تمثيل المؤثــر الخطــي $T: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ بمصفوفة (راجع البند ٢ــ٩) حيث تعتمد هذه المصفوفة $T_E = (\tau_{jk})$ على اختيار القاعدة $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ لـ $\mathbf{R}^n$ التي نرتب عناصرها وفق ترتيب معين نبقيه مثبتا • سنختار قاعدة E ، ونعتبر $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ و $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ متجهين عموديين، ونستخدم الرمز المعتاد في ضرب المصفوفات • عندئذ يكون

$$y = T_E x \quad \text{، وباستعمال المركبات :} \quad \eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \qquad (7)$$

حيــث $j = 1, \cdots, n$ • لتكن $F = \{f_1, \cdots, f_n\}$ القاعدة الثنوية لـ E (راجــع البند ٢ــ٩) • ان F قاعدة لـ $\mathbf{R}^{n\prime}$ (الذي هو أيضا فضاء اقليدي بعده n استنادا الى ٢ــ١٠ــ٥) • عندئذ يكون لـ g في $\mathbf{R}^{n\prime}$ تمثيل من الشكل

$$g = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

واعتمادا على تعريف القاعدة الثنوية لدينا $f_j(y) = f_j(\sum \eta_k e_k) = \eta_j$ • لذا فاننا نجد استنادا الى (7) أن

$$g(y)=g(T_E x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\eta_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\tau_{jk}\xi_k.$$

وبتغيير ترتيب الجمع ، فمن الممكن كتابة هذا بالشكل

$$g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k \quad \text{حيث} \quad \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j. \tag{8}$$

يمكننا اعتبار هذا على أنه تعريف لدالي f على X بدلالة g ، أي أن

$$f(x)=g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k.$$

واذا أعدنا الى الذاكرة تعريف المؤثر المرافق ، فيمكننا كتابة ما يلي :

$$f=T_E^{\times}g, \quad \text{وباستعمال المركبات} \quad \beta_k=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\alpha_j.$$

وبملاحظة أننا في β_k نجمع بالنسبة الى الدليل الايسر (وبالتالي فاننا نجمع وفق كل عناصر **عمــود** من T_E) ؛ فاننا نجد النتيجة التالية :

اذا كان T ممثلا بمصفوفة T_E ، فان المؤثر المرافق $T^{\times}$ يمثل بمنقول T_E •

ومن الجدير بالذكر بأن هذا يصح أيضا اذا كان T مؤثرا خطيا من $\mathbf{C}^n$ في $\mathbf{C}^n$ • ∎

ولدى التعامل مع المؤثر المرافق ، فلا تخلو الدساتير من (9) وحتى (12) من الفائدة ، وسنترك اقامة البراهين الموافقة للقارىء • ليكــن $S, T\in B(X, Y)$ ، راجع البند ٢ــ١٠ • عندها يكون

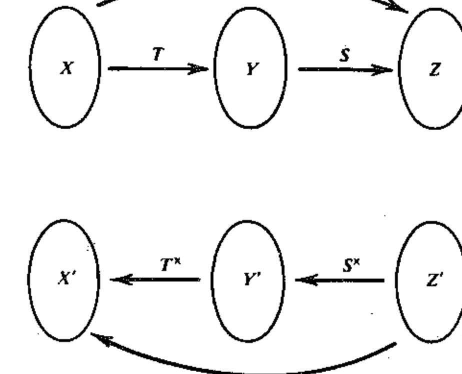
$$(S+T)^{\times}=S^{\times}+T^{\times} \tag{9}$$

$$(\alpha T)^{\times}=\alpha T^{\times}. \tag{10}$$

لنفترض أن $X,\ Y,\ Z$ فضاءات منظمة ، وأن $T\in B(X, Y)$ و $S\in B(Y, Z)$ •

عندئذ نجد الدستور التالي للمؤثر المرافــق لمركب المؤثرين ST (أنظــر الــى الشـــكل ٤١) •

$$(ST)^{\times} = T^{\times} S^{\times}. \tag{11}$$



الشكل (٤١) • ايضاح الدستور (11)

اذا كان $T \in B(X, Y)$ و T^{-1} موجودا ، وكان $T^{-1} \in B(Y, X)$ ، فان $(T^{\times})^{-1}$ يكون موجودا أيضا ويكون $(T^{\times})^{-1} \in B(X', Y')$ ، وأيضا

$$(T^{\times})^{-1} = (T^{-1})^{\times}. \tag{12}$$

العلاقة بين المؤثر المرافق $T^{\times}$ ومؤثر هلبرت المرافق T^* • (راجع البند ٣ــ٩)

سنبين أن مثل هذه العلاقةموجــودفي حالة مؤثر خطي محدود $T\colon X \longrightarrow Y$ حينما يكون X و Y فضاءي هلبرت ، مثلا $X = H_1$ و $Y = H_2$ • في هذه الحالة ، نجد أولا (الشكل ٤٢)

$$\begin{array}{c} H_1 \xrightarrow{\ T\ } H_2 \\ \\ H_1' \xleftarrow{\ T^{\times}\ } H_2' \end{array} \tag{13}$$

حيث يعرف المؤثر المرافق $T^{\times}$ للمؤثر المعطى T كما في السابق على النحو التالي .

$$(14)\quad \begin{array}{lll} \text{(a)} & T^{\times} g = f & \\ \text{(b)} & g(Tx) = f(x) & (f \in H_1', g \in H_2'). \end{array}$$

ان السمة الجديدة تتلخص في أنه لما كان f و g داليين على فضاءي هلبرت ، فانه يوجد لهما تمثيلان لريس (راجع البند ٣ــ٨ــ١) ؛ ولنفترض مثلا أن

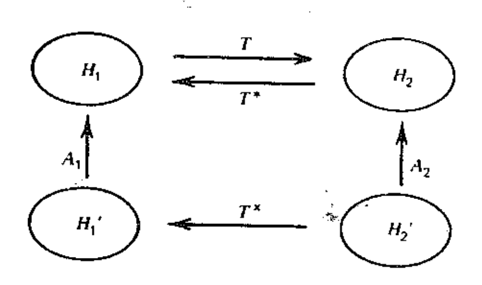
$$(15)\quad \begin{array}{lll} \text{(a)} & f(x) = \langle x, x_0 \rangle & (x_0 \in H_1) \\ \text{(b)} & g(y) = \langle y, y_0 \rangle & (y_0 \in H_2), \end{array}$$

وعندما نعلم أيضا من المبرهنة ٣ــ٨ــ١ أن x_0 و y_0 يتعينان بصورة وحيدة بـ f و g على الترتيب ٠ ان هذا يعين المؤثرين

$$A_1:\ H_1' \longrightarrow H_1 \qquad \text{و} \qquad A_1 f = x_0,$$

$$A_2:\ H_2' \longrightarrow H_2 \qquad \text{و} \qquad A_2 g = y_0.$$

ونرى استنادا الى المبرهنة ٣ــ٨ــ١ أن A_1 و A_2 متباينان وغامران وايزومتريان نظرا لان $\|A_1 f\| = \|x_0\| = \|f\|$ ، ولوجود علاقة مماثلة لـ A_2 ٠ كذلك فان المؤثريـــن A_1 و A_2 مترافقان خطيا (راجع البند ٣ــ١) ٠ وفعلا فاذا كتبنا



الشكل (٤٢) ٠ المؤثرات في الدستورين (13) و (17)

$f_1(x)=\langle x, x_1\rangle$ و $f_2(x)=\langle x, x_2\rangle$ ، فاننا نجد أنه أيا كان x وأيا كان العددان α ، β فـــان

$$(\alpha f_1+\beta f_2)(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$$
$$=\alpha\langle x, x_1\rangle+\beta\langle x, x_2\rangle \tag{16}$$
$$=\langle x, \bar{\alpha}x_1+\bar{\beta}x_2\rangle.$$

ان هذا يبين استنادا الى تعريف A_1 الترافق الخطي

$$A_1(\alpha f_1+\beta f_2)=\bar{\alpha}A_1f_1+\bar{\beta}A_1f_2.$$

وفي حالة A_2 ، فاننا نجد برهانا مماثلا •

ونجد بالتركيب المؤثر (انظر الى الشكل ٤٢)

$$T^*=A_1T^{\times}A_2^{-1}: H_2\longrightarrow H_1 \quad \text{المعرف بالقاعدة} \quad T^*y_0=x_0 \tag{17}$$

إن T^* خطي ذلك أنه يحوي على تطبيقين اثنيــن مترافقين خطيا ، بالاضافة الـــى المؤثر الخطي $T^{\times}$ • سنثبت أن T^* هو حقا مؤثر هلبرت المرافق لـ T • ان هــذا أمر سهل ؛ ذلك أننا نستنتج مباشرة من (14) أو (16) أن

$$\langle Tx, y_0\rangle=g(Tx)=f(x)=\langle x, x_0\rangle=\langle x, T^*y_0\rangle,$$

وهذا ليس الا (1) من البند ٣ــ٩ باستثناء الرموز • وهكذا فاننا نجد النتيجة التاليـــة :

ان الدستور (17) يمثل مؤثر هلبرت المرافق T^* لمؤثر خطي T على فضــاء هلبرت بدلالة المؤثر المرافق $T^{\times}$ لـ T •

لاحظ كذلك بأن المساواة $\|T^*\|=\|T\|$ (المبرهنة ٣ــ٩ــ٢) تستنتج رأسا من (5) ومن ايزومترية A_1 و A_2 • ∎

لاكمال هذه المناقشة ، علينا أيضا ادراج بعض الفروق الرئيسية بين المؤثر المرافق $T^{\times}$ للمؤثر $T: X \longrightarrow Y$ ومؤثر هلبرت المرافق T^* للمؤثر $T: H_1 \longrightarrow H_2$ ، حيث X و Y فضاءان منظمان ، وحيث H_1 و H_2 فضاءا هلبرت •

ان $T^{\times}$ معرف على الفضاء الثنوي للفضاء الحاوي لمدى T ، في حين أن T^* معرف رأسا على الفضاء الحاوي لمدى T • وقد مكنتنا هذه الخاصة لـ T^* من تعريف صنوف هامة من المؤثرات باستعمال مؤثرات هلبرت المرافقة لها (راجع ٣ــ١٠ــ١) •

واستنادا الى (10) فاننا نجد لـ $T^{\times}$ الخاصة التالية

$$(\alpha T)^{\times} = \alpha T^{\times}$$

في حين أننا نجد لـ T^* استنادا الى ٣ــ٩ــ٤ أن

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*.$$

يمثّل $T^{\times}$ في الفضاءات منتهية البعد بمنقول المصفوفة الممثّلة لـ T ، في حين أن T^* يمثل بالمرافق العقدي لمنقول تلك المصفوفة (لمزيد من التفصيل ، راجع ٤ــ٥ــ٣ و ٣ــ١٠ــ٢) •

مسائل

١ ــ بين بأن الدالي المعرف بـ (1) خطي •

٢ ــ ما هما مرافقا المؤثر الصفري 0 والمؤثر المطابق I ؟

٣ ــ أثبت صحة (9) •

٤ ــ أثبت صحة (10) •

٥ ــ أثبت صحة (11) •

٦ ــ بين بأن $(T^{a})^{\times}=(T^{\times})^{a}$ •

٧ ــ ما هي صيغ المصفوفات التي نحصل عليها بدمج (11) مع المثال ٤ــ٥ــ٣ ؟

٨ ــ أثبت صحة (12) •

٩ ــ (**العادم**) ليكن X و Y فضاءين منظمين و $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، ولنفترض أن $M=\overline{\mathfrak{R}(T)}$ لصاقة مدى T • أثبت أن (راجع المسألة ١٣ من البند ٢ــ١٠)

$$M^{a}=\mathcal{N}(T^{\times}).$$

١٠ــ (**العادم**) لتكن B مجموعة جزئية من الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X • يعرف **العادم** ^{a}B لـ B بأنه

$$^{a}B=\{x\in X \mid f(x)=0 \text{ for all } f\in B\}.$$

بين أنه في المسألة ٩ يكون

$$\mathfrak{R}(T)\subset {}^{a}\mathcal{N}(T^{\times}).$$

ماذا يعني هذا بالنسبة لعملية حل المعادلة $Tx=y$ ؟

٤ــ٦ الفضاءات الانعكاسية

لقد سبق وبحثنا في الانعكاسية **الجبرية** للفضاءات **المتجهية** في البند ٢ــ٨، أما **انعكاسية** الفضاءات **المنظمة** فسيكون موضوع بحثنا في هذا البند • لكننا أولا سنعيد الى الذاكرة ما فعلناه في البند ٢ــ٨ • نذكر بأنه يقال عن فضاء متجهي X انه **انعكاسي جبريا** اذا كان التطبيق القانوني غامرا • ان $X^{**}=(X^{*})^{*}$ هنا هو الفضاء الثنوي الجبري الثاني لـ X ، وحيث نعرف التطبيق C بأنه $x \longmapsto g_x$ بفرض أن

$$g_x(f)=f(x) \qquad (1)$$

بمعنى أن صورة أي عنصر x من X هو دالي خطي g_x معرف بالمساواة (1) • واذا كان X منتهي البعد ، فان X انعكاسي جبريا ؛ وهـذا أمر أثبتناه في المبرهنـة ٢ـ٩ـ٣ •

لننتقل الآن الى مهمتنا الاصلية • لنأخذ فضاء منظما X وفضاءه الثنوي ، كما عرفناه في ٢ـ١٠ـ٣ ، وأيضا الفضاء الثنوي $(X')'$ للفضاء X' • يرمز لهذا الفضاء بـ X'' ، ويطلق عليه اسم **الفضاء الثنوي الثاني** لـ X •

سنعرف داليا g_x على X' باختيار عنصر مثبت x من X وكتابة أن

$$g_x(f) = f(x) \qquad f \in X' \text{ متغير} \tag{2}$$

ان هذه المساواة تشبه (1) ، الا أنه تجدر بنا الاشارة الى أن f هنـا محدود • كذلك فقد تبين أن g_x محدود أيضا ، الامر الذي يبينه التمهيدية الاساسية التالية :

٤ـ٦ـ١ تمهيدية (نظيـم g_x)

اذا كان x عنصـرا مثبتـا في فضاء منظم X ، فان الدالي g_x المعرف ب (2) **هو دالي خطي محدود على X' ، كما أن لهذا الدالي g_x المنتمي الى X'' النظيم**

$$\|g_x\| = \|x\|. \tag{3}$$

البرهـان :

ان خطية g_x سبق ووجدناها في البند ٢ـ٨ • أما (3) فتنتج من (2) ومن النتيجـة ٤ـ٣ـ٤ :

$$\|g_x\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|. \tag{4}$$ ∎

يقابل كل x من X دالي خطي محدود وحيد $g_x \in X''$ محدد بالمساواة (2) • ان هذا يحدد تطبيقا هو التالي

$$C: X \longrightarrow X''$$
$$x \longmapsto g_x. \qquad (5)$$

يسمى C **التطبيق القانوني** لـ X في X'' • سنبين أن C خطي ومتباين ويحفظ النظيم ، وهذا أمر يعبر عنه بدلالة ايزومورفيزم فضاءين منظمين كما سبق وذكرنا في البند ٢ـ١٠ :

٤ـ٦ـ٢ تمهيدية (التطبيق القانوني)

التطبيق القانوني C المعرف ب (5) هو ايزوموفيزم للفضاء المنظم X على الفضاء المنظم $\mathcal{R}(C)$ ($\mathcal{R}(C)$ هو مدى C) •

البرهـان :

ان خطية C تستنتج من البند ٢ـ٨ ذلك أن

$$g_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha g_x(f) + \beta g_y(f).$$

وبوجه خاص ، فان $g_x - g_y = g_{x-y}$ • لذا فاننا نجد استنادا الى (3) أن

$$\|g_x - g_y\| = \|g_{x-y}\| = \|x-y\|.$$

وهذا يبين أن C ايزومتري ، اذن فهو يحفظ النظيم•ان الايزومترية تقتضي التباين• الامر الذي يمكن رؤيته مباشرة من دستورنا • وفي الحقيقة ، فاذا كان $x \neq y$ ، فان $g_x \neq g_y$ وفق الموضوعة (ن٢) من البند ٢ـ٢ • لذا فان C متباين وغامر باعتباره تطبيقا على مداه •∎

يقال عن X انه **طمـور** في فضاء منظم Z اذا كان X ايزومورفيا مع فضاء جزئي من Z • ان هذا مماثل لما أوردناه في البنـد ٢ـ٨ ، الا أنه يجدر بنـا ملاحظة أننا نتعامـل هنـا مـع ايزومورفيزمات لفضاءات منظمـة ، أي مـع

ايزومورفيزمات لفضاءات متجهية تحفظ النظيم (راجع البند ٢ـ١٠) • تبين التمهيدية٤ـ٦ـ٢أن X طمور في X'' ، ويدعى C الطمر القانوني لـ X في X'' •

إن C ليس عامرا في الحالة العامة ، وبالتالي فان المدى $\mathcal{R}(C)$ هو فضاء جزئي تماما من X'' • ان الحالة التي يكون فيها $\mathcal{R}(C)$ مساويا لـ X'' بأكمله هامة لدرجة تستدعي اعطاءها اسما كما يلي :

٤ـ٦ـ٣ تعريف (الانعكاسية)

نقول عن فضاء منظم X انه **انعكاسي** اذا كان

$$\mathcal{R}(C) = X''$$

حيث $C\colon X \longrightarrow X''$ هو التطبيق القانوني المعرف بـ (5) و (2) • ∎

لقد قدم هذا المفهوم هان عام ١٩٢٧ م• ، أما اسم «الانعكاسية» فقد أطلقه لورش عام ١٩٣٩ م • لقد أدرك هان أهمية الانعكاسية خلال دراسته للمعادلات الخطية في الفضاءات المنظمة ، تلك الدراسة التي أدى اليها موضوع المعادلات التكاملية •

اذا كان X انعكاسيا ، فانه ايزومورفي (وبالتالي ايزومتري) مع X'' استنادا الىالتمهيدية ٤ـ٦ـ٢ • ومن المهم معرفة أن العكس ليس صحيحا في الحالة العامة ، كما بين جيمس في عامي ١٩٥٠ م و ١٩٥١ م •

كذلك ، فان التمام لايقتضي الانعكاسية ، الا أننا نجد أن العكس صحيح كما تبين المبرهنة التالية :

٤ـ٦ـ٤ مبرهنة (التمام)

اذا كان الفضاء المنظم X انعكاسيا ، فانه تام (وبالتالي فضاء باناخ) •

البرهان :

بما أن X'' هو الفضاء الثنوي لـ X'، فانه تام وفق المبرهنة ٢ـ١٠ـ٤ • ان

انعكاسية X تعني أن $\mathscr{R}(C)=X''$ • وبالتالي فان تمام X ينتج من كون X'' تامــا استنادا الى التمهيدية ٤ـ٦ـ٢ • ∎

الفضاء $\mathbf{R}^n$ انعكاسي ، وهذا ناتج مباشرة عــن ٢ـ١٠ـ٥ • والانعكاسية صفة يتمتع بها كل فضاء منظم منتهي البعد X • وفعلا ، فاذا كان $\dim X<\infty$ ، فان كل دالي خطي على X محدود (راجع ٢ـ٧ـ٨) وبالتالي فان $X'=X^*$ • وهكذا فان الانعكاسية الجبرية لـ X (راجع ٢ـ٩ـ٣) تقتضي ما يلي :

٤ـ٦ـ٥ مبرهنة (البعد المنتهي)

كل فضاء منظم منتهي البعد انعكاسي •

إن l^p ، حيث $1<p<+\infty$ ، فضاء انعكاسي ؛ وهذا ناتج مــن ٢ـ١٠ـ٧ • كذلك ، فان $L^p[a, b]$ ، حيث $1<p<+\infty$ ، انعكاسي ؛ وهو أمر يمكن اثباتــه • ويمكن أيضا الاثبات بأن الفضاءات التالية غــير انعكاسية : الفضـــاء $C[a, b]$ (راجع ٢ـ٢ـ٥) ، والفضاء l^1 (سنورد البرهان بعد قليل) ، والفضاء $L^1[a, b]$ (راجع ٢ـ٢ـ٤) ؛ والفضاءان الجزئيان c و c_0 من l^∞ ، حيث c هو فضـــاء كل المتتاليات المتقاربة من الاعداد و c_0 هو فضاء كـــل المتتاليات العددية المتقاربة مــن الصفــر •

٤ـ٦ـ٦ مبرهنة (فضاء هلبرت)

كل فضاء H لهلبرت انعكاسي

البرهــان :

سنثبت أن التطبيق القانوني $C: H \longrightarrow H''$ غامر وذلك بتبيان أنه يوجد لكل g من H'' عنصر x مــن H بحيث يكــون $g=Cx$ • لهــذا الغــرض سنعرف $A: H' \longrightarrow H$ بالدستور $Af=z$ ، حيث z معطى بتمثيل ريـــس $f(x)=\langle x, z\rangle$ الوارد في ٣ـ٨ـ١ • نحن نعلم من ٣ـ٨ـ١ أن A متباين وايزومتري • كذلك فان A خطي مرافق كمانرى من (16) مــن البند ٤ـ٥ • ان H' تام استنادا الــى

٢ــ١٠ــ٤ وهو فضاء لهلبرت مزود بالجداء الداخلي المعرف كالتالي :

$$\langle f_1, f_2\rangle_1 = \langle Af_2, Af_1\rangle.$$

لاحــظ الترتيــب الذي يرد وفقه f_1 و f_2 في كلا الطرفين • من الممكن التحقق ببساطة من (جد ١) ــ (جـ ٤) الواردة في البنــد ٣ــ١ • وبوجه خاص ، فــان (جد ٢) ناتج من كون A خطيا مرافقا :

$$\langle \alpha f_1, f_2\rangle_1 = \langle Af_2, A(\alpha f_1)\rangle = \langle Af_2, \bar{\alpha} Af_1\rangle = \alpha\langle f_1, f_2\rangle_1.$$

ليكن $g \in H''$ اختياريا ، ولنفترض أن تمثيل ربس له هو

$$g(f) = \langle f, f_0\rangle_1 = \langle Af_0, Af\rangle.$$

نحن نذكر الآن بأن $f(x) = \langle x, z\rangle$ ، حيث $z = Af$ • واذا كتبنا $Af_0 = x$ ، نجد أن

$$\langle Af_0, Af\rangle = \langle x, z\rangle = f(x).$$

لذا فاننا نجد أن $g(f) = f(x)$ ؛ أي أن $g = Cx$ استنادا الى تعريف C • ولما كان $g \in H''$ اختياريا ، فان C غامر ، وبالتالي فان H انعكاسي •∎

ان الفصولية أو عدم الفصولية أمــر يمكنه أحيانا أن يلعب دورا ما في البرهان على أن فضــاء ما ليس انعكاسيا • وهــذه الصلة بيــن الانعكاسية والفصولية طريفة وجد بسيطة ، وتمثل المبرهنة ٤ــ٦ــ٨ (التي سنوردها الآن) أهم مبرهنة في هذا الصدد ، وهي تنص على أن كون X' فصولا يقتضي أن يكون X كذلك (أما العكس فغير صحيح بعامة) • لذا فاذا كان فضــاء منظــم X انعكاسيا ، فان X'' ايزومورفي مع X استنادا الى ٤ــ٦ــ٢ ؛ بحيث أن فصولية X في هذه الحالة تقتضي فصولية X'' ، وبالتالي فان ٤ــ٦ــ٨ تقتضي أن يكــون الفضاء X' فصولا كذلك ، نستنتج من هذا النتيجة التالية :

لا يمكن أن يكون الفضاء المنظم الفصول X الذي فضاؤه الثنوي X' غيــر فصــول انعكاسيا •

مثـــال :

الفضاء l^1 غير انعكاسي •

البرهـــان :

الفضاء l^1 فصول استنادا الى ١ـ٣ـ١٠ ، في حين أن $l^{1\prime}=l^\infty$ ليس كذلك• راجع ٢ـ١٠ـ٦ و ١ـ٣ـ٩ •

ان المبرهنة المنشودة ٤ـ٦ـ٨ يمكن ايجادها من التمهيدية التالية • ويقدم الشكل (٤٣) ايضاحا بسيطا للتمهيدية •

٤ـ٦ـ٧ تمهيدية (وجود الدالي)

ليكن Y فضاء جزئيـا تامـا ومغلقـا في فضـاء منظـم X • ليكـن العنصـر $x_0 \in X - Y$ اختياريا ، ولتكن

$$\delta = \inf_{\tilde{y}\in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \tag{6}$$

المسافة بين x_0 و Y ، عندئذ يوجد $\tilde{f} \in X'$ بحيث أن

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \tilde{f}(y) = 0 \text{ أيا كان } y \in Y \qquad \tilde{f}(x_0) = \delta. \tag{7}$$

البرهـــان :

إن فكرة البرهان بسيطة • لنأخذ الفضاء الجزئي Z من X المولد بـ Y و x_0 ، ولنعرف على Z الدالي الخطي المحدود f على النحو

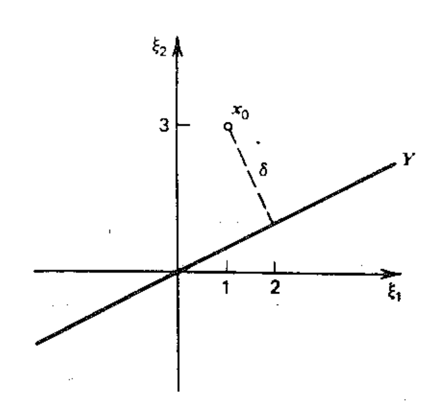
$$f(z) = f(y + \alpha x_0) = \alpha\delta \qquad y \in Y, \tag{8}$$

سنبين أن f يحقق (7) وسنمدد f الى X وفق ٤ـ٣ـ٢ • أما التفاصيل فهي كمـا يلـي :

يوجد لكل z من $Z = \text{span}(Y \cup \{x_0\})$ التمثيل الوحيد

$$z = y + \alpha x_0 \qquad y \in Y.$$

وهذا مستعمل في (8) • أن خطية f واضحة للعيان • كذلك لما كان مغلقا ، فان $\delta > 0$ ، وبالتالي فان $f \neq 0$ • اذا افترضنا أن $\alpha = 0$ ، فان $f(y) = 0$ أيـا كـان y مـن Y • واذا افترضنا أن $\alpha = 1$ و $y = 0$ ، فاننا نجد $f(x_0) = \delta$ •



الشكل (٤٣)• ايضاح التمهيدية ٤ـ٦ـ٧ في حالة الفضاء الاقليدي $X = \mathbf{R}^3$ ، حيث Y ممثل بـ $\xi_2 = \xi_1/2,\ \xi_3 = 0$ و $x_0 = (1, 3, 0)$ ، وبالتالي يكون $\delta = \sqrt{5}$ ، $Z = \text{span}\,(Y \cup \{x_0\})$ هو المستوي $\xi_1\xi_2$ و $f(z) = (-\xi_1 + 2\xi_2)/\sqrt{5}$

سنبين أن f محدود • اذا كان $\alpha = 0$ فان $f(z) = 0$ • لنفترض أن $\alpha \neq 0$ • عندئذ نجد استنادا الى(6) وبملاحظة أن $-(1/\alpha)y \in Y$ مـا يلـي :

$$|f(z)| = |\alpha|\,\delta = |\alpha| \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\|$$

$$\leqq |\alpha| \left\| -\frac{1}{\alpha}\, y - x_0 \right\|$$

$$= \|y + \alpha x_0\|,$$

أي أن $|f(z)| \leqq \|z\|$ • لذا فان f محدود و $\|f\| \leqq 1$ •

سنبين أن $\|f\| \geqq 1$ • يحوي Y وفق تعريف الحد الادنى متتالية (y_n) بحيث

أن $\|y_n - x_0\| \longrightarrow \delta$ • لنفترض أن $z_n = y_n - x_0$ • عندئذ نجد اعتمادا على (8) أن $f(z_n) = -\delta$ ؛ حيث $\alpha = -1$ • كذلك فـــان

$$\|f\| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geqq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\delta}{\delta} = 1$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ • لذا فان $\|f\| \geqq 1$ ، وبالتالي فان $\|f\| = 1$ • واستنادا الى مبرهنة هان ــ باناخ ٤ــ٣ــ٢ المتعلقة بالفضاءات المنظمة ، فيمكن تمديد f الى X دون زيـــادة النظيـــم •∎

وبالاستعانة بهذه التمهيدية ، يغدو من الممكن الآن اثبات المبرهنة المنشودة التاليـــة :

٤ــ٦ــ٨ مبرهنـــة (الفصولية)

اذا كان الفضاء الثنوي X' لفضاء منظم X فصولا ، فان X نفسه فصول •

البرهـــان :

ليكن X' فصولا • عندئذ تحوي الكـــرة الواحدية $U' = \{f \mid \|f\| = 1\} \subset X'$ مجموعة جزئية كثيفة وعدودة أيضا ، ولتكن (f_n) • وبمـــا أن $f_n \in U'$ ، فاننـــا نجـــد أن

$$\|f_n\| = \sup_{\|x\| = 1} |f_n(x)| = 1.$$

واستنادا الى تعريف الحد الاعلى ، فمن الممكن العثور على نقاط x_n من X نظيمها 1 بحيـــث أن

$$|f_n(x_n)| \geqq \frac{1}{2}.$$

لتكن Y لصاقة المجموعة $\text{span}\,(x_n)$ • عندئذ يكون Y فصـــولا لان Y يحـــوي

مجموعة جزئية كثيفة وعدودة ، ونعني بها مجموعة كل التراكيب الخطية للحدود x_n بمعاملات أقسامها الحقيقية والتخيلية أعداد عادية •

سنبين أن $Y = X$ • لنفترض مؤقتا أن $Y \neq X$ • عندئذ نجد استنادا الى التمهيدية ٤ـ٦ـ٧ نظرا لكون Y مغلقا أنه يوجد $\bar{f}$ من X' يحقق المساواة $\|\bar{f}\| = 1$ ، والشرط $\bar{f}(y) = 0$ أيا كان y من Y • وبما أن $x_n \in Y$ ، فاننا نجد أن $\bar{f}(x_n) = 0$ ، وأنه لدينا أيا كان n

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leqq |f_n(x_n)| &= |f_n(x_n) - \bar{f}(x_n)| \\ &= |(f_n - \bar{f})(x_n)| \\ &\leqq \|f_n - \bar{f}\| \, \|x_n\|,\end{aligned}$$

حيث $\|x_n\| = 1$ • لذا فان $\|f_n - \bar{f}\| \geqq \frac{1}{2}$ • لكـن هذا مناقض للفرض القائل بأن (f_n) كثيفة في U' لان $\bar{f}$ نفسه في U' ، وفعلا فان $\|\bar{f}\| = 1$ •∎

مسائل

١ ــ عين الداليين f و g في (2) اذا كان $X = \mathbf{R}^n$ •

٢ ــ قدم برهانا أبسط على التمهيدية ٤ـ٦ـ٧ للحالة التي يكون فيها X فضاء هلبرت •

٣ ــ اذا كان فضاء منظم X انعكاسيا ؛ فبين بأن X' انعكاسي •

٤ ــ بين بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء باناخ X انعكاسيا ، هو أن يكون فضاؤه الثنوي X' انعكاسيا • (**ملاحظة** : من الممكن اثبات أن كل فضاء جزئي مغلق من فضاء باناخ الانعكاسي انعكاسي أيضا • أفد من هذه الدعوى دون اثباتها) •

٥ ــ أثبت انطلاقا من افتراضات التمهيدية ٤ـ٦ـ٧ ، أنه يوجد دالـي خطـي

محدود h على X بحيث يكون $\|h\|=1/\delta$ و $h(y)=0$ أيا كان y مـــن Y و $h(x_0)=1$.

٦ ـ بين أنه يوجد لاي فضاءين جزئيين مغلقين ومختلفين Y_1 و Y_2 من فضاء منظم X عادمان مختلفان (راجع المسألة ١٣ من البند ٢ـ١٠) •

٧ ـ ليكن Y فضاء جزئيا مغلقا في فضاء منظم X بحيث يكون كـــل f من X' مساو للصفر حيثما كان على Y صفريا حيثما كان على الفضاء X بأكمله • برهـــن أن $Y=X$ •

٨ ـ لتكن M أي مجموعة جزئية من فضاء منظم X • برهن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_0 \in X$ عنصرا من $A=\overline{\text{span } M}$ هـــو أن يكون $f(x_0)=0$ أيا كان f من X' الذي يحقق الشرط $f|_M=0$ •

٩ ـ **(المجموعة الكلية)** • بين بأن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M في فضاء منظم كلية في X هو التالي : أيا كان $f \in X'$ الذي يساوي الصفر حيثما كان على M ، فان f يساوي الصفر حيثما كان على X •

١٠ـ بين أنه اذا وجد لفضاء منظم X مجموعة جزئية مستقلة خطيا مؤلفة مـــن n من العناصر ، فان الفضاء الثنوي X' يكون كذلك •

٤ـ٧ مبرهنة الفئة • مبرهنة المحدودية المنتظمة

إن مبرهنة المحدودية المنتظمة (أو **مبدأ المحدودية المنتظمة**) التي تعود لباناخ وشتاينهاوس (١٩٢٧ م•) ذات أهمية بالغة • وفعلا فان كثيرا من الامثلة والنتائج التي ترد في التحليل الرياضي ترتبط بهذه المبرهنة ، أولها بحثه لوبيـــغ (١٩٠٩ م) •وغالبا ما تعتبر مبرهنـــة المحدودية المنتظمة واحدة مـــن الاركـــان الاساسية التي يستند اليها التحليل الدالي في الفضاءات المنظمة ؛ أمـــا الاركان الاخرى فهي مبرهنة هان ـ باناخ (البندان ٤ـ٢ و ٤ـ٣) ، ومبرهنة التطبيق المفتوح (البند ٤ـ١٢) ، ومبرهنة البيان المغلق (البنـــد ٤ـ١٣) • وخلافـــا

لمبرهنة هان ـ باناخ ، فان المبرهنات الثلاث الاخرى من هذه المبرهنات الاربع تتطلب شرط التمام • وفعلا ، فانها تجسد بعضا من أهم خواص فضاءات باناخ التي قد لا تتمتع بها الفضاءات المنظمة في الحالة العامة •

ومن الاهمية بمكان ملاحظة أننا سنتوصل الى المبرهنات الثلاث جميعا من منطلق واحد • وبعبارة أدق ، فاننا سنثبت ما يسمى مبرهنة بير في الفئات ؛ ومن ثم نشتق منها مبرهنة المحدودية المنتظمة (في هذا البند) ، وأيضا مبرهنة التطبيق المفتوح (في البند ٤ـ١٢) • أما مبرهنة البيان المغلق (في البند ٤ـ١٣) فتستنتج انطلاقا من المبرهنة الاخيرة •

ويوجد لمبرهنة بير في الفئات تطبيقات أخرى في التحليل الدالي ، وهي السبب الاساسي في دخول الفئة في براهين عديدة ، راجع مثلا الكتابين التاليين :

Edwards, R. E. (1965), *Functional Analysis.* New York: Holt, Rinehart and Winston

Kelley, J. L., and I. Namioka (1963), *Linear Topological Spaces.* New York: Van Nostrand

سندرج في التعريف ٤ـ٧ـ١ المفاهيم اللازمة لمبرهنة بير ٤ـ٧ـ٢ • ولكل من هذه المفاهيم اسم حديث وآخر قديم نورده بين قوسين • والاسم القديم في طريقه الى الزوال ، ذلك أن كلمة «فئة» تستعمل الآن لغرض رياضي مختلف تماما (لن يرد في هذا الكتاب) •

٤ـ٧ـ١ تعريف (الفئة)

يقال عن مجموعة جزئية M من فضاء متري X انها

(أ) **نادرة (او غير كثيفة في اي مكان)** في X اذا لم تحتو لصاقتها $\bar{M}$ نقاطا داخلية (راجع البند ١ـ٣) ،

(ب) **هزيلة (او من الفئة الاولى)** في X اذا كانت M اجتماعا معدودا لجماعة من المجموعات كل منها نادر في X •

(ج) غير هزيلة (أو من الفئة الثانية)في X اذا لم تكن M هزيلة في X .

٤-٧-٢ مبرهنة بير في الفئات (الفضاءات المترية التامة)

اذا كان الفضاء المتري غير الخالي X تاما ، فانه هزيل في نفسه .

لذا فاذا كان X غير الخالي تاما وكان

$$A_k \text{ مغلقة} \qquad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad (1)$$

فان واحدة على الاقل من المجموعات A_k تحوي مجموعة جزئية مفتوحة وغير خالية .

البرهـان :

ان فكرة البرهان سهلة . لنفترض أن الفضاء المتري التام غير الخالي X هزيل في نفسه . عندئذ يكون

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \qquad (1^*)$$

حيث M_k نادرة في X . سننشيء متتالية كوشـي (p_k) بحيث تكون نهايتها p (التي نحكم بوجودها بسبب التمام) غير موجودة في أي مـن المجموعات M_k ، وهذا يناقض التمثيل (1^*) .

ان M_1 نادرة في X فرضا ، وبالتالي فان $\bar{M}_1$ تعريفا لا تحوي مجموعة مفتوحة غير خالية ، في حين أن X تحوي مثل هذه المجموعة (المجموعة X نفسها مثلا) . وهذا يقتضي أن يكون $\bar{M}_1 \neq X$. لذا فان المتممة $\bar{M}_1{}^C = X - \bar{M}_1$ لـ $\bar{M}_1$ ليسـت خالية ومفتوحة . وبالتالي فيمكن اختيار نقطة p_1 في $\bar{M}_1{}^C$ وكرة مفتوحة حولها ، ولتكـن مثـلا

$$B_1 = B(p_1; \varepsilon_1) \subset \bar{M}_1{}^C \qquad \varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}.$$

ان M_2 هـي فرضـا نادرة في X ، وبالتالي فـان $\bar{M}_2$ لاتحوي مجموعة مفتوحة غير خالية . لذا ، فانها لاتحوي الكـرة المفتوحة $B(p_1; \tfrac{1}{2}\varepsilon_1)$. وهـذا يقتضي أن

تكون المجموعة $\bar{M}_2^c \cap B(p_1; \frac{1}{2}\varepsilon_1)$ ليست خالية ومفتوحة ، وبالتالي فيمكن اختيار كرة مفتوحة في هذه المجموعة ، ولتكن مثلا

$$B_2 = B(p_2; \varepsilon_2) \subset \bar{M}_2^c \cap B(p_1; \tfrac{1}{2}\varepsilon_1) \qquad \varepsilon_2 < \tfrac{1}{2}\varepsilon_1.$$

واستنادا الى طريقة الاستقراء الرياضي ، فاننا نجد متتالية من الكرات

$$B_k = B(p_k; \varepsilon_k) \qquad \varepsilon_k < 2^{-k}$$

بحيث أن $B_k \cap M_k = \varnothing$ وأن

$$B_{k+1} \subset B(p_k; \tfrac{1}{2}\varepsilon_k) \subset B_k \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

ولما كان $\varepsilon_k < 2^{-k}$ ، فان متتالية المراكز (p_k) هي متتالية كوشي ، وبالتالي فانهـا تتقارب من عنصر وليكن p مثلا في X ؛ ذلك لكون X تاما فرضا . كذلك ، فانه اذا كان m عددا ما و n عددا آخر بحيث يكون $n > m$ ، فان $B_n \subset B(p_m; \frac{1}{2}\varepsilon_m)$ ، وبالتـالي فـان

$$\begin{aligned} d(p_m, p) &\leqq d(p_m, p_n) + d(p_n, p) \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon_m + d(p_n, p) \longrightarrow \tfrac{1}{2}\varepsilon_m \end{aligned}$$

عندما $n \longrightarrow \infty$. لذا فان $p \in B_m$ أيا كان m . ولما كان $B_m \subset \bar{M}_m^c$ ، فاننا نـرى أن $p \notin M_m$: أيا كان m ، واذن نجد أن $p \notin \bigcup M_m = X$ ، وهذا يناقض كون $p \in X$ وبذا يكتمل إثبات مبرهنة بـير . ∎

وتجدر بنا الاشارة الى أن عكس مبرهنة بير ليس صحيحا بعامة . وقد ورد مثال على فضاء منظم غير تام دون أن يكون هزيلا في نفسه . وهذا المثال وارد في الصفحتين ٣ و ٤ من كتاب :

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique*, livre V. *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. III à V. Paris: Hermann

سنشتق الآن من مبرهنة بير مباشرة مبرهنة المحدودية المنتظمـة المنشودة .

وتنص هذه المبرهنة على أنه اذا كان X فضاء باناخ ؛ وأنه اذا كانت متتالية من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ محدودة في كل نقطة x من X ، فان هذه المتتالية محدودة بانتظام • وبعبارة أخرى ، فان المحدودية النقطية تقتضي محدودية بمفهوم أقوى ، ألا وهي المحدودية المنتظمة • (ان العدد الحقيقي c_x في المتباينة (2) الواردة بعد قليل ، سيتغير في الحالة العامة مع x ، ونعبر عن هذا بوضع الدليل في أسفل x ، والمهم في الامر هو أن c_x غير تابعة لـ n) •

٤ـ٧ـ٣ مبرهنة المحدودية المنتظمة

لتكن (T_n) متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة $T_n: X \to Y$ من فضاء باناخ X الى الفضاء المنظم Y بحيث تكون المتتالية $(\|T_n x\|)$ محدودة أيا كان x من X ، كان يكون مثلا

$$\|T_n x\| \leqq c_x \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

حيث c_x عدد حقيقي • عندئذ تكون متتالية النظائم $\|T_n\|$ محدودة ، بمعنى أنه يوجد عدد c بحيث يكون

$$\|T_n\| \leqq c \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

البرهان :

لنقابل كل عدد k من $\mathbf{N}$ بالمجموعة $A_k \subset X$ المؤلفة كل من العناصر x المحققة للمتباينة

$$\|T_n x\| \leqq k \qquad \text{أيا كان } n$$

ان A_k مغلقة ، ذلك أنه اذا كان x عنصرا ما من $\bar{A}_k$ ، فثمة متتالية (x_j) في A_k تتقارب من x • وهذا يعني أنه يقابل كل عدد مثبت n المتباينة $\|T_n x_j\| \leqq k$ ، ونحصل بالتالي على المتباينة $\|T_n x\| \leqq k$ ، ذلك أن T_n مستمر ، وكذلك النظيم (راجع البند ٢ـ٢) • لذا فان $x \in A_k$ ، وبالتالي فان A_k مغلقة •

نلاحظ من (2) أن كل x من X ينتمي الى مجموعة ما A_k وبالتالي فان

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

وبما أن X تام ، فانه يترتب على مبرهنة بير أن احدى المجموعات A_k تحوي كرة مفتوحة ، كأن يكون مثلا

$$B_0 = B(x_0; r) \subset A_{k_0}. \tag{4}$$

ليكن x عنصرا اختياريا غير صفري من X • لنضع

$$\gamma = \frac{r}{2\|x\|}, \qquad z = x_0 + \gamma x \tag{5}$$

عندئذ يكون $\|z - x_0\| < r$ ، وبالتالي فان $z \in B_0$ • وهكذا فاننا نجد انطلاقا من (4) ومن تعريف A_{k_0} أن $\|T_n z\| \leqq k_0$ أيا كان n • كذلك ، فان $\|T_n x_0\| \leqq k_0$ نظرا لكون $x_0 \in B_0$ • ونجد من (5) أن

$$x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0).$$

وبالتالي فاننا نجد أيا كان n ما يلي :

$$\|T_n x\| = \frac{1}{\gamma}\|T_n(z - x_0)\| \leqq \frac{1}{\gamma}(\|T_n z\| + \|T_n x_0\|) \leqq \frac{4}{r}\|x\|\, k_0.$$

يترتب على هذا أنه أيا كان n فان

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leqq \frac{4}{r}\, k_0,$$

وهذا ليس سوى (3) بعد تعويض $c = 4k_0/r$ • ∎

تطبيقـات

٤-٧-٤ فضاء الحدوديات

ان الفضاء المنظم X لكل الحدوديات المزودة بالنظيم المعرف بـ

$$\|x\| = \max_i |\alpha_i| \qquad (\alpha_0, \alpha_1, \cdots \text{ هي معاملات } x) \tag{6}$$

ليس تاما .

البرهـــان :

لنشكل متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة على X تحقق (2) دون (3) ، وبالتالي فان X لايمكن أن يكون تاما .

يمكننا كتابة حدودي $x \neq 0$ درجته N_x بالصيغة

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j \qquad (\alpha_j = 0 \text{ عندما } j > N_x).$$

(في الحالة $x = 0$ ، فان الدرجة لا تتحدد بالتعريف العادي للدرجة ، الا أن هذا أمر ليس بذي بال هنا) . وسنأخذ كمتتالية للمؤثرات علـى X متتالية الداليات $T_n = f_n$ المعرفـة كمـا يلــي :

$$T_n 0 = f_n(0) = 0, \qquad T_n x = f_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}. \tag{7}$$

إن f_n خطي . كذلك فان f_n محدود ذلك أن $|\alpha_j| \leqq \|x\|$ وفق (6) ؛ وبالتالي فان $|f_n(x)| \leqq n\,\|x\|$. وفضلا عن ذلك ، فان المتتالية $(|f_n(x)|)$ تحقق (2) أيـا كـان العنصر المثبت x في X ، ذلك أنه يوجـد في الحدودي x الـذي درجته N_x معاملات عددها $N_x + 1$ ، وبالتالي فاننـا نجد استنادا الى (7) أن

$$|f_n(x)| \leqq (N_x + 1) \max_j |\alpha_j| = c_x$$

وهي من الصيغة (2) .

سنبـين الآن (f_n) لا تحـقق (3) ، أي أنـه لا يوجـد c بحيث يكون $\|T_n\| = \|f_n\| \leqq c$ أيا كان n . ان هذا أمر نقوم به باختيار حدوديات غير مؤاتية . ونختار لـ f_n الحدودي x المعرف كالتالي

$$x(t) = 1 + t + \cdots + t^n.$$

عندئذ يكون $\|x\| = 1$ وفق (6) ونجد أن

$$f_n(x) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n = n\,\|x\|.$$

لذا فان $\|f_n\| \geq |f_n(x)|/\|x\| = n$ ، وبالتالي فان $(\|f_n\|)$ غير محدودة • ∎

٤ـ٧ـ٥ متسلسلات فورييه

من المعلوم ، كما سبق ورأينا في ٣ـ٥ـ١ ، أن متسلسلة فورييه لدالة دورية معطاة x دورها 2π هي من الشكل

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt) \tag{8}$$

وأن معاملات فورييه لـ x تعطى بدستوري أولر التاليين

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \cos mt\, dt, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t) \sin mt\, dt. \tag{9}$$

[كتبنا $a_0/2$ في (8) كي نجد دستورين فقط في (9) ، في حين أنه عندما كتبنا في ٣ـ٥ـ١ ، فاننا احتجنا الى ثلاثة دساتير] •

من المعلوم أن المتسلسلة (8) قد تتقارب حتى في نقاط تكون فيها x غير مستمرة (راجع المسألة ١٥ التي تمدنا بمثال بسيط عن هذا) • وهـذا يبين أن الاستمرار ليس شرطا لازما للتقارب • ومن المدهش هنا أن يكون شرط الاستمرار غير كاف كذلك(*) • وفي الحقيقة ، فانه اذا استخدمنا مبرهنة المحدودية المنتظمة فانه يمكن اثبات ما يلي :

ثمة دوال حقيقية مستمرة بحيث أن متسلسلات فورييه لهذه الدوال تتباعد في نقطة معطاة t_0 •

البرهـان :

ليكن X الفضاء المنظم المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة التي دورها

---

* إن شرط الاستمرار ووجود مشتق ايمن ومشتق ايسر في نقطة t_0 كاف للتقارب في t_0 . راجع الصفحة ٧٠ من كتاب W. Rogosinski (١٩٥٩) •

2π، حيث يعرف النظيم بالمساواة

$$\|x\| = \max |x(t)|. \tag{10}$$

ان X هو فضاء باناخ استنادا الى ١ـ٥ـ٥ حيث $a=0$ و $b=2\pi$. من الممكن أخذ $t_0=0$ دون مس العمومية . لاثبات دعوانا ، سنطبق مبرهنة المحدودية المنتظمة ٤ـ٧ـ٣ على $T_n=f_n$ ، حيث $f_n(x)$ هو القيمة في $t=0$ للمجموع الجزئي للحدود الاولى التي عددها n من متسلسلة فوريية لـ x . وبما أنه عندما $t=0$ تكون الحدود الجيبية صفرية وتكون حدود جيوب التمام واحدية ، فاننا نستنتج من (8) و (9) أن

$$f_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt\right] dt.$$

سنعين الدالة الممثلة بالمجموع الوارد تحت اشارة المكاملة . لهذا نحسب

$$2\sin\tfrac{1}{2}t \sum_{m=1}^{n} \cos mt = \sum_{m=1}^{n} 2\sin\tfrac{1}{2}t\cos mt$$

$$= \sum_{m=1}^{n} [-\sin(m-\tfrac{1}{2})t + \sin(m+\tfrac{1}{2})t]$$

$$= -\sin\tfrac{1}{2}t + \sin(n+\tfrac{1}{2})t,$$

حيث نجد العبارة الاخيرة بملاحظة أن أكثر الحدود تحذف أزواجا . وبالتقسيم على $\sin\frac{1}{2}t$ واضافة 1 الى الطرفين ، فاننا نجد أن

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

وبالتالي ، فان الدستور الذي يعطي $f_n(x)$ يمكن أن يكتب بالصيغة البسيطة التالية

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)\,dt; \qquad q_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}. \tag{11}$$

ويمكننا بالاستعانة بهذا أن نبين بأن الدالي الخطي f_n محدود • وفعلا فانه يترتب على (10) و(11) أن

$$|f_n(x)| \leqq \frac{1}{2\pi} \max |x(t)| \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt = \frac{\|x\|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt.$$

ونرى من هنا أن f_n محدود • وفضلا عن ذلك ، فانه اذا أخذنا الـ sup عندما تمسح x جميع العناصر التي نظيمها 1 ، فاننا نجد أن

$$\|f_n\| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt.$$

سنبين الآن أن الاشارة في هذه العلاقة هي اشارة التساوي • ولهذا نكتب

$$|q_n(t)| = y(t) q_n(t)$$

حيث $y(t) = +1$ في كل نقطة t يكون فيها $q_n(t) \geqq 0$ ، وحيث $y(t) = -1$ فيما عدا ذلك • ان y ليست مستمرة ، بيد أنه اذا كان ε عددا موجبا معطى ، فانه يمكن ربطه بدالة مستمرة x نظيمها 1 بحيث أنه من أجل x هذه يكون

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)] q_n(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

وبكتابة هذا على شكل مجموع تكاملين ، والاستعانة بـ (11) نجد أن

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(t) q_n(t)\, dt - \int_0^{2\pi} y(t) q_n(t)\, dt \right| = \left| f_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt \right| < \varepsilon.$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ اختياري وأن $\|x\| = 1$ ، فاننا نجد الدستور المنشود

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)|\, dt. \qquad (12)$$

سنبين أخيرا أن المتتالية $(\|f_n\|)$ غير محدودة • فاذا عوضنا في (12) عبارة q_n من (11) ، وأفدنا من أن $|\sin\frac{1}{2}t|<\frac{1}{2}t$ عندما يكون $t\in(0,2\pi]$ ، ووضعنا $(n+\frac{1}{2})t=v$ فاننا نجد ما يلي :

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt$$

$$>\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}\,dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}\,dv$$

$$\geqq\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|\,dv$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\longrightarrow\infty$$ عندما $n\longrightarrow\infty$

لكون المتسلسلة التوافقية متباعدة • لذا فالمتتالية $(\|f_n\|)$ غير محدودة ؛ وبالتالي فان (3) (حيث $T_n=f_n$) غير صحيحة • وبما أن X تام ، فاننا نستنتج أن (2) لا يمكن أن تصح من أجل جميع العناصر x ، وبالتالي فلابد من وجود x من X بحيث تكون $(|f_n(x)|)$ غير محدودة • وهذايعني استنادا الى تعريف f_n أن متسلسلة فورييه للدالة x هذه متباعدة في النقطة $t=0$ • ∎

لاحظ أن برهاننا للوجود هذا لا ينبئنا عن كيفية ايجاد مثل هذه الدالة المستمرة x بحيث تتباعد متسلسلة فورييه لـ x في نقطة $t=t_0$ • وقد أورد أمثلة على مثل هذه الدوال كل من فيجير Fejér (١٩١٠ م) وروغوزينسكي Rogosinski (١٩٥٩ م) •

مسائل

١ ـ ما هي فئة مجموعة كل الاعداد العادية (آ) في $\mathbf{R}$ ، (ب) في نفسها (حيث المجموعة مزودة بالمترك المألوف) ؟

٢ ـ ما هي فئة مجموعة كل الاعداد الصحيحة (آ) في $\mathbf{R}$ ، (ب) في نفسها (حيث المترك هو مقصور مترك القيمة المطلقة) ؟

٣ ـ أوجد المجموعات النادرة في فضاء متري متقطع X (راجع ١ـ١ـ٨) .

٤ ـ أوجد مجموعة جزئية كثيفة وهزيلة في $\mathbf{R}^2$.

٥ ـ بين بأن الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة جزئية M من فضاء متري X نادرة هو أن تكون $(\bar{M})^c$ كثيفة في X .

٦ ـ بين بأن المتممة M^c لمجموعة جزئية هزيلة M في فضاء متري تام X غير هزيلة.

٧ ـ **(الرنيـن)** ليكن X فضاء باناخ و Y فضـاء منظمـا و $T_n \in B(X, Y)$ ، $n = 1, 2, \cdots$ مؤثرات بحيث يكون $\sup_n \|T_n\| = +\infty$. بين أنه توجد نقطة $x_0 \in X$ بحيث يكون $\sup_n \|T_n x_0\| = +\infty$. [تسمى غالبا النقطة x_0 **نقطة الرنين** ، ومسألتنا توحي باستعمال مصطلح **مبرهنة الرنين** لمبرهنة المحدودية المنتظمة].

٨ ـ بين بأن تمام الفضاء X ضروري في المبرهنة ٤ـ٧ـ٣ ولا يمكن حذفه . [خذ الفضاء الجزئي X من l^∞ المؤلف من كل المتتاليات $x = (\xi_j)$ بفرض أن $\xi_j = 0$ عندما $j \geqq J \in \mathbf{N}$ ، حيث J يتعلق بـ x ، ولنفترض أن T_n معرف كمـا يلـي : $T_n x = f_n(x) = n\xi_n$] .

٩ ـ ليكن $T_n = S^n$ ، حيث يعرف المؤثر $S: l^2 \longrightarrow l^2$ كما يلي :

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \longmapsto (\xi_3, \xi_4, \xi_5, \cdots).$$

أوجد حدا لـ $\|T_n x\|$ ، أوجد $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|$ و $\|T_n\|, \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|$.

١٠ـ **(الفضاء** c_0 **)** لتكن $y = (\eta_j)$ و $\eta_j \in \mathbf{C}$ بحيث أن $\sum \xi_j \eta_j$ تتقارب أيا كان

$x=(\xi_j)\in c_0$ ، حيث $c_0 \subset l^\infty$ هو الفضاء الجزئي المؤلف من كـل المتتاليات العقدية المتقاربة من الصفر • بين بأن $\sum|\eta_j|<\infty$ (استعن بـ ٤ــ٧ــ٣) •

١١ــ ليكن X فضاء باناخ و Y فضاء منظما و $T_n \in B(X, Y)$ متتالية بحيث تكون $(T_n x)$ متتالية كوشي في Y أيا كان x من X • بين أن $(\|T_n\|)$ محدودة •

١٢ــ اذا كان Y في المسألة ١١ تاما أيضا ، فبين أن $T_n x \longrightarrow Tx$ ، حيث $T \in B(X, Y)$ •

١٣ــ اذا كانت (x_n) متتالية في فضاء باناخ X بحيث أن $(f(x_n))$ محدودة أيا كان f من X' ، فبين أن $(\|x_n\|)$ محدودة •

١٤ــ اذا كان X و Y فضاءي باناخ وكان $T_n \in B(X, Y)$ ، $n=1, 2, \cdots$ ، فبين بأن الدعاوي التالية متكافئة :

(آ) $(\|T_n\|)$ محـدودة ،

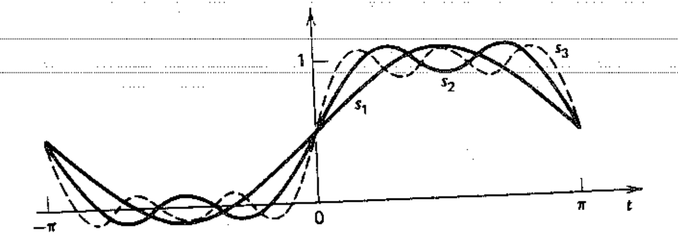
(ب) $(\|T_n x\|)$ محـدودة أيا كان x من X ؛

(جـ) $(|g(T_n x)|)$ محـدودة أيا كان x من X وأيا كان g من Y' •

١٥ــ لتبيان أن متسلسلة فورييه لدالة x قد تتقارب في نقطة تكون فيها x غير مستمرة ، أوجد متسلسلة فورييه للدالة

$$x(t)=\begin{cases}0 & -\pi \leqq t<0 \quad \text{اذا كان} \\ 1 & 0 \leqq t<\pi \quad \text{اذا كان}\end{cases} \qquad x(t+2\pi)=x(t).$$

ارسم بيان x وبيانات المجاميع الجزئية s_0, s_1, s_2, s_3 ، وقارن بالشكل (٤٤) • بين بأن قيمة المتسلسلة في النقاط $t=\pm n\pi$ هي $1/2$ ، وهو الوسط الحسابي للنهايتين اليمنـى واليسرى لـ x ، إن هـذا سلوك نموذجي لمتسلسلات فوريـيـه •



الشكل (٤٤) • المجاميع الجزئية الثلاثة الاولى s_1 و s_2 و s_3 في المسالة ١٥

٤ــ٨ التقارب القوي والتقارب الضعيف

لقد سبق وعرفنا في التحليل الرياضي الابتدائي أنماطا مختلفة من التقارب (تقارب عادي ، وشرطي ، ومطلق ، ومنتظم) • وكان من نتيجة هذا أن نظرية المتتاليات والمتسلسلات وتطبيقاتها تمتعت بقدر كبير من المرونة • ان الوضع مماثل في التحليل الدالي ، بل اننا هنا أمام تنوع أكبر للامكانات ذات الاهمية العملية • وفي هذا البند ، سنعنى في المقام الاول « بالتقارب الضعيف » ، الذي يشكل واحدا من المفاهيم الرئيسية • وتقديمنا له الآن يعود الى أن نظريته تفيد الى درجة كبيرة من مبرهنة المحدودية المنتظمة التي بحثناها في البند السابق • وفعلا فان التقارب الضعيف واحد من أهم تطبيقات هذه المبرهنة •

لقد سبق وعرفنا تقارب متتاليات عناصرها تنتمي الى فضاء منظم في البند ٢ــ٣ ، وسنسمي هذا التقارب من الآن فصاعدا **التقارب القوي** بهدف تمييزه عن « التقارب الضعيف » الذي سنورد تعريفه بعد قليل • لذا فاننا نورد أولا ما يلي :

٤ــ٨ــ١ تعريف (التقارب القوي)

يقال عن متتالية (x_n) في فضاء منظم X انها **متقاربة بقوة (او متقاربة في النظيم)** اذا وجد x من X بحيث يكون

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

ونعبر عن هذا بأن نكتب

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

أو أن نكتب بشكل أبسط

$$x_n \longrightarrow x.$$

تسمى x **النهاية القوية** للمتتالية (x_n) ، ونقول إن (x_n) **تتقارب بقوة من** x • ∎

أما التقارب الضعيف ، فانه يعرف بدلالة الداليات الخطية المحدودة على X كما يلي :

٤ـ٨ـ٢ تعريف (التقارب الضعيف)

يقال عن متتالية (x_n) في فضاء منظم X انها **متقاربة بضعف** اذا وجد x من X بحيث أنه أيا كان f من X' فان

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

ونكتب هذا بالشكل

$$x_n \xrightarrow{w} x$$

أو بالشكل $x_n \longrightarrow x$ • يسمى العنصر x **النهاية الضعيفة** لـ (x_n) ، ونقول إن (x_n) **تتقارب بضعف من** x • ∎

لاحظ أن التقارب الضعيف يعني تقارب المتتاليات العددية $a_n = f(x_n)$ أيا كان f من X' •

للتقارب الضعيف تطبيقات عدة في التحليل الرياضي (في حساب التغيرات وفي النظرية العامة للمعادلات التفاضلية مثلا) • ويوضح هذا المفهوم مبدأ

أساسيا في التحليل الدالـي • ونعني به حقيقـة أن دراسة الفضاءات غالبا ما ترتبط بدراسة فضاءاتها الثنوية •

لتطبيق التقارب الضعيف ، فانه يلزمنا التعرف على بعض خواصه الاساسية التي سننص عليها في التمهيدية التالية • سيلاحظ القارىء أننا نستعمل في الاثبات مبرهنة هان ــ باناخ (مــن خلال ٤ــ٣ــ٤ و ٤ــ٦ــ١) ومبرهنــة المحدودية المنتظمة • ان هذا يبين أهمية هاتين المبرهنتين فيما يخص التقارب الضعيف •

٤ــ٨ــ٣ تمهيدية (التقارب الضعيف)

لتكن (x_n) متتالية متقاربة بضعف في فضـاء منظـم X ، كأن يكـون مثـلا $x_n \xrightarrow{w} x$ • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) النهاية الضعيفة x لـ (x_n) وحيـدة •

(ب) كل متتالية جزئية من (x_n) تتقارب بضعف من x •

(جـ) المتتالية $(\|x_n\|)$ محـدودة •

البرهـان :

(آ) لنفتـرض أن $x_n \xrightarrow{w} y$ وأيضـا $x_n \xrightarrow{w} x$ • عندئـذ يكـون $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ وأيضا $f(x_n) \longrightarrow f(y)$ • ولما كانت $(f(x_n))$ متتالية عددية ، فـان نهايتها وحيدة • اذن $f(x)=f(y)$ ، أي أنه أيا كان f من X' فان

$$f(x)-f(y)=f(x-y)=0.$$

وهذا يقتضي أن يكون $x-y=0$ استنادا الى النتيجة ٤ــ٣ــ٤ ، وبالتالي فـان النهاية الضعيفة وحيدة •

(ب) ان هذا ينتج من كون $(f(x_n))$ متتالية متقاربة من الاعداد ، وبالتالي فان كل متتالية جزئية من $(f(x_n))$ متقاربة ولها نهاية المتتالية نفسها •

(جـ) بما أن $(f(x_n))$ متتالية متقاربة من الاعداد ، فانها محدودة ، وليكن

مثلا $|f(x_n)| \leqq c_f$ أيا كان n ، حيث c_f ثابت يتعلق بـ f وليس بـ n • وباستعمال التطبيق القانوني $C: X \longrightarrow X''$ (البند ٤ـ٦) فيمكن تعريف g_n من X'' كما يلي :

$$g_n(f) = f(x_n) \qquad\qquad f \in X'.$$

(نكتب g_n بدلا من g_{x_n} لتجنب كتابة أدلة للادلة) • عندئذ نجد لكل n أن

$$|g_n(f)| = |f(x_n)| \leqq c_f,$$

أي أن المتتالية $(|g_n(f)|)$ محدودة أيا كان f من X' • بما أن X' تام وفق ٢ـ١٠ـ٤، فان مبرهنة المحدودية المنتظمة ٤ـ٧ـ٣ قابلة للتطبيق وتقتضي ان تكون $(\|g_n\|)$ محدودة • وبما أن $\|g_n\| = \|x_n\|$ استنادا الى ٤ـ٦ـ١ فان (جـ) صحيح •■

قد يعجب القارىء لكـون التقارب الضعيف لا يلعـب دورا في التحليل الرياضي ، ان السبب البسيط لهذا يعـود الى أن التمييز بين التقارب القـوي والتقارب الضعيف في الفضاءات المنتظمة منتهية البعد يزول تماما • سنثبت الآن صحة هذا الكلام ، كما نبرر مصطلحي « القوي » و « الضعيف » •

٤ـ٨ـ٤ مبرهنة (التقارب القوي والتقارب الضعيف)

لتكن (x_n) متتالية في فضاء منظم X • عندئذ نجد ما يلي :

(آ) ان التقارب القوي يقتضي التقارب الضعيف ، والنهاية واحدة •

(ب) ان عكس (آ) ليس صحيحا بعامة •

(جـ) اذا كان $\dim X < \infty$ ، فان التقارب الضعيف يقتضي التقارب القوي •

البرهـان :

(آ) ان $x_n \longrightarrow x$ تعني تعريفا أن $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ ، وهذا يقتضي أنه أيا كان f من X فان

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leqq \|f\| \|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

وبالتالي فان $x_n \xrightarrow{w} x$

(ب) يمكن التحقق من هذا عن طريق متتالية متعامدة منظمة (e_n) في فضاء هلبرت H • وفعلا ، فانه يوجد لكل f من H' تمثيل ريس $f(x)=\langle x, z\rangle$ • لذا فان $f(e_n)=\langle e_n, z\rangle$ • كذلك ، فان متباينة بسل هي (راجع ٣ــ٤ــ٦)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z\rangle|^2 \leqq \|z\|^2.$$

لذا فان المتسلسلة الواردة في الطرف الايسر متقاربة ؛ وبالتالي فان حدودها يجب أن تتقارب من الصفر عندما $n \longrightarrow \infty$ ، الامر الذي يقتضي أن يكون

$$f(e_n)=\langle e_n, z\rangle \longrightarrow 0.$$

وبما أن $f \in H'$ اختياري ، فاننا نرى أن $e_n \xrightarrow{w} 0$ ، في حين أن (e_n) لا تتقارب بقوة نظرا لكون

$$\|e_m - e_n\|^2 = \langle e_m - e_n, e_m - e_n\rangle = 2 \qquad (m \neq n).$$

(جـ) لنفترض أن $x_n \xrightarrow{w} x$ وأن $\dim X = k$ • لتكن $\{e_1, \cdots, e_k\}$ أي قاعدة لـ X ، وليكن مثلا

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k$$

و

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k.$$

لدينا فرضا $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ أيا كان f من X' • لنأخذ بشكل خاص الداليات f_1 , ... , f_k المعرفة كما يلي :

$$f_j(e_j) = 1, \qquad f_j(e_m) = 0 \qquad (m \neq j).$$

(نذكر بأن هذه هي القاعدة الثنوية لـ $\{e_1, \cdots, e_k\}$ ، راجع البند ٢ــ٩) عندئذ يكون

$$f_j(x_n) = \alpha_j^{(n)}, \qquad f_j(x) = \alpha_j.$$

لذا فان $f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x)$ تقتضي أن يكــون $\alpha_j^{(n)} \longrightarrow \alpha_j$ • نستنتج مــن هــذا مباشــرة أن

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j) e_j \right\|$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j| \, \|e_j\| \quad \longrightarrow \quad 0$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ ؛ الامر الذي يبين بأن (x_n) متقاربة بقوة من x • ∎

ومن الطريف أن نلاحظ بأنه توجد أيضا فضاءات غير منتهية البعد يكون فيها مفهوما التقارب القوي والتقارب الضعيف متكافئين • وقد بين شور Schur (١٩٢١ م•) أن l^1 هو أحد هذه الفضاءات •

أمثلــة

٤ــ٨ــ٥ فضــاء هلبرت

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ في فضاء هلبرت هو أن يكــون $\langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$ ايا كان z في هذا الفضاء •

البرهــان :

هذا أمر واضح استنادا الى ٣ــ٨ــ١ •

٤ــ٨ــ٦ الفضــاء l^p

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ في الفضاء l^p ، حيث $1 < p < +\infty$ ، هــو أن يتحقق الشرطان التاليان :

(آ) أن تكــون المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة •

(ب) اذا كان j عددا طبيعيا مثبتا ، فان $\xi_j^{(n)} \longrightarrow \xi_j$ عنــدما $n \longrightarrow \infty$ •

لدينــا هنــا $x_n = (\xi_j^{(n)})$ $x = (\xi_j)$

البرهــان :

الفضاء الثنوي لـ l^p هو l^q ، راجع ٢ـ١٠ـ٧ • وكقاعدة لشاودر في l^q نورد المتتالية (e_n) ، حيث $e_n=(\delta_{nj})$ متتالية جميع حدودها أصفار عدا الحد النوني• ان $\text{Span}\,(e_n)$ كثيفة في l^q ، وبالتالي فاننا نصل الى ما نبغي استنادا الى التمهيدية التاليــة :

٤ـ٨ـ٧ تمهيدية (التقارب الضعيف)

الشرط اللازم والكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ في فضاء منظم X هو أن يتحــقق الشــرطان التاليــان :

(آ) ان تكون المتتالية $(\|x_n\|)$ محدودة •

(ب) اذا كان f أي عنصر مــن مجموعــة جزئية كليــة M مــن X' ، فــان $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ •

البرهــان :

في حالة التقارب الضعيف ، فان (آ) ينتج من التمهيدية ٤ـ٨ـ٣ ؛ ويكون (ب) تافهــا •

وبالعكس ، لنفترض تحقق (آ) و (ب) • لنأخذ أي f من X' ، ولنثبت أن $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ ، الامر الذي يعني تعريفا ان التقارب ضعيف •

لدينا استنادا الى (آ) أن $\|x_n\| \leqq c$ أيا كان n ، وهكذا فان $\|x\| \leqq c$ حيث c عدد كبير بقدر كاف • وبما أن M كلية في X' ؛ فانــه يوجد لكــل f في X' متتالية (f_j) في $\text{span}\, M$ بحيث أن $f_j \longrightarrow f$ • وبالتالي ، يمكننا أن نجد لكــل عدد موجب ε عددا طبيعيا j بحيث يكون

$$\|f_j - f\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

وفضلا عن ذلك ، فلما كان $f_j \in \text{span}\, M$ وفق الفرض (ب) ، فيوجد عدد طبيعي N بحيث أنه اذا كان n أي عدد طبيعي يحقق الشرط $n > N$ فان

$$|f_j(x_n)-f_j(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

وباستخدام هاتين المتباينتين وتطبيق متباينة المثلث ، فاننا نجد عندما $n>N$ أن

$$|f(x_n)-f(x)|\leqq|f(x_n)-f_j(x_n)|+|f_j(x_n)-f_j(x)|+|f_j(x)-f(x)|$$

$$<\|f-f_j\|\,\|x_n\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|f_j-f\|\,\|x\|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3c}\,c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}\,c=\varepsilon.$$

ولما كان $f\in X'$ اختياريا ، فان هذا يثبت أن المتتالية (x_n) تتقارب بضعف من x • ∎

مسائل

١ ــ **(التقارب النقطي)** اذا كان $x_n\in C[a,b]$ وكان $x_n\xrightarrow{w}x$ في $C[a,b]$ ، فبين أن (x_n) متقاربة نقطيا على $[a,b]$ ، أي أن $(x_n(t))$ متقاربة أيا كان t من $[a,b]$ •

٢ ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين و $T\in B(X,Y)$ ، ولتكن (x_n) متتالية في X • فاذا كان $x_n\xrightarrow{w}x_0$ ، أثبت أن $Tx_n\xrightarrow{w}Tx_0$ •

٣ ــ اذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين في فضاء منظم واحد X ، فبين أن $x_n\xrightarrow{w}x$ و $y_n\xrightarrow{w}y$ يقتضيان أن $x_n+y_n\xrightarrow{w}x+y$ وأيضا أن $\alpha x_n\xrightarrow{w}\alpha x$ حيث α أي عدد •

٤ ــ أثبت أن $x_n\xrightarrow{w}x_0$ يقتضي أن يكون $\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|\geqq\|x_0\|$ • (أفد من المبرهنة ٤ــ٣ــ٣) •

٥ ــ اذا كان $x_n\xrightarrow{w}x_0$ في فضاء منظم X ، فبين أن $x_0\in\bar{Y}$ ، حيث $Y=\operatorname{span}(x_n)$ • (استخدم التمهيدية ٤ــ٦ــ٧) •

٦ ــ لتكن (x_n) متتالية متقاربة بضعف في فضاء منظم X ، ولنفترض أن

$x_n \xrightarrow{\text{ض}} x_0$ • برهن على وجود متتالية (y_m) حدودها تراكيب خطية لعناصر من (x_n) بحيث تتقارب هذه المتتالية بقوة من x_0 •

٧ ــ بين أن أي فضاء جزئي مغلق Y من فضاء منظم X يحوي نهايات كل المتتاليات المتقاربة بضعف من عناصر Y •

٨ ــ **(متتالية كوشي الضعيفة)** • **متتالية كوشي الضعيفة** في فضاء منظم حقيقي أو عقدي X هي متتالية (x_n) في X بحيث أنه اذا كان f أي عنصر من X' ، فان المتتالية $(f(x_n))$ تكون متتالية كوشي في $\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$ على الترتيب• (لاحظ أ ن $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ تكون عندئذ موجودة) • بين أن متتالية كوشي الضعيفة محدودة •

٩ ــ لتكن A مجموعة في فضاء منظم X بحيث تكون كل مجموعة جزئية غير خالية في A حاوية على متتالية ضعيفة لكوشي • بين أن A محدودة •

١٠ــ **(التمام الضعيف)** يقال عن فضاء منظم X انه **تام بضعف** اذا كانت كل متتالية ضعيفة لكوشي في X متقاربة بضعف في X • فاذا كان X انعكاسيا، بين عندئذ أن X تام بضعف •

٤ــ٩ تقارب متتاليات المؤثرات والداليات

ان متتاليات المؤثرات والداليات الخطية والمحدودة تنشأ مرارا لدى الصياغة المجردة لمواضيع معينة ، مثل مسائل تقارب متسلسلات فورييه ، أو متتاليات حدوديات الاستكمال interpolation ، أو طرائق المكاملة العددية ، وغيرها • وفي مثل هذه الحالات نكون عادة معنيين بتقارب تلك المتتاليات للمؤثرات أو الداليات التي تكون متتالية النظائم المقابلة لها محدودة أو تحقق خواص مماثلة •

وتبين التجربة أنه في حال المتتاليات التي حدودها **عناصر** من فضاء منظم ، ان التقارب القوي والتقارب الضعيف كما عرفناهما في البند السابق هما

مفهومان مفيدان • وفي حال المتتاليات التي حدودها **مؤثرات** $T_n \in B(X, Y)$ ، فقد تبين أن ثمة ثلاثة أنماط من التقارب ذات قيمة نظرية وعملية كذلك ، وهي :

(١) التقارب في النظيم على $B(X, Y)$ ،
(٢) التقارب القوي لـ $(T_n x)$ في Y ،
(٣) التقارب الضعيف لـ $(T_n x)$ في Y •

وفيما يلي نورد التعاريف والمصطلحات الضرورية ، وكان قد اقترحها فون نويمان J. von Neumann (١٩٢٩ ـ ١٩٣٠ م) •

٤ـ٩ـ١ تعريف (تقارب متتاليات المؤثرات)

ليكن X و Y فضاءين منظمين •

نقول عن متتالية (T_n) من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ انها :

(١) **متقاربة بانتظام**(*) اذا كانت (T_n) متقاربة في النظيم على $B(X, Y)$ •

(٢) **متقاربة بقوة** اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بقوة في Y أيا كان x من X •

(٣) **متقاربة بضعف** اذا كانت $(T_n x)$ متقاربة بضعف في Y أيا كان x من X •

واذا أردنا استعمال الدساتير ، فان هذا يعني وجود مؤثر $T: X \longrightarrow Y$ بحيث أن

(١) $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$

(٢) $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$ أيا كان x من X

(٣) $|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0$ أيا كان x من X وأيا كان f من Y'

على الترتيب • يسمى T **النهاية المنتظمة ، والقوية ، والضعيفة** لـ (T_n) على الترتيب • ∎

---

* يطلق بعض المؤلفين على هذا التقارب اسم **«التقارب المنتظم بالنسبة للمؤثرات»** وذلك زيادة في التحديد . الا اننا سنكتفي بتسمية « التقارب المنتظم » بقصد الاختصار . وترد ملاحظتان مماثلتان في (٢) و (٣) من هذا التعريف .
(المترجم)

لقد سبق وأشرنا في البند السابق أنه حتى في التحليل الرياضي ، وهــو الموضوع الابسط من التحليل الدالي ، فان استعمال مفاهيم متنوعة للتقارب يعطي نظرية المتتاليات والمتسلسلات قدرا أكبر من المرونة • ومع ذلــك ، فقــد يضيع القارىء في خضم المفاهيم العديدة التي أوردناها توا • وقد يسأل عن سبب لزوم التعامل مع ثلاثة أنواع من التقارب لمتتاليات المؤثرات • والاجابة تتلخص في أن كثيرا من المؤثرات التي ترد في المسائل العملية تعطى على أنها نوع معين مــن النهاية لمؤثرات أبسط • ومن المهم معرفة ماذا نعني بـ « نوع معين » ، ومعرفــة أي من الخواص لمؤثر النهاية تقتضيها خواص المتتاليات • كذلك ، فاننا عند البدء بدراسة ما ؛ لا نعلم دوما بأي معنى توجد النهايات ، لذلك فانه لأمــر مفيد أن تكون لدينا جملة من الامكانات•وقد يكون المرء في مسألة محددة قادرا على اثبات التقارب بمعنى « معتدل » جدا فقط ، بحيث يكون لديه على الاقل شيء ينطلق منه ، وبعد ذلك يطور أدوات لاثبات التقارب بمعنى أقوى ، الامر الذي يكفل خواص « أفضل » لمؤثر النهاية • وهذا أمر نموذجي في حالة المعادلات التفاضلية مثــلا •

ليس من العسير اثبات أن

$$(1) \implies (2) \implies (3)$$

(حيث النهاية واحدة) ؛ الا أن العكس ليس صحيحا بعامة . كما يمكن أن نراه من الامثلة التالية •

أمثلــة

٤ــ٩ــ٢ (الفضــاء l^2)

لنأخــذ في الفضاء l^2 المتتالية (T_n) ، حيــث المؤثرات $T_n\colon l^2 \longrightarrow l^2$ معرفة كالتــالي :

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \cdots);$$

حيث $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$ • ان هذا المؤثر خطي ومحدود • ومن الواضح أن T_n متقاربة بقوة مــن الصفر • ذلــك أن $T_n x \longrightarrow 0 = 0x.$ • الا أن (T_n) ليســت متقاربة بانتظام ذلك أن $\|T_n - 0\| = \|T_n\| = 1$ •

٤ــ٩ــ٣ (الفضــاء l^2)

لنأخذ متتالية أخرى (T_n) من المؤثرات $T_n: l^2 \longrightarrow l^2$ معرفة كالتالي

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$$

حيث $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$ • ان هذا المؤثر خطــي ومحــدود • سنبين أن T_n متقاربة بضعف من الصفر ، دون أن تتقارب بقوة •

لكل من الداليات الخطية المحدودة f على l^2 تشيل ريس ٣ــ٨ــ١ ، أي أنه لدينا وفق ٣ــ١ــ٦

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\zeta}_j$$

حيث $z=(\zeta_j) \in l^2$ • لذا ، فاذا وضعنا $j=n+k$ واستعملنا تعريف T_n نجــد أن

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n} \bar{\zeta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\zeta}_{n+k}.$$

واستنادا الى متباينة كوشي ــ شفارتز من ١ــ٢ــ٣ ، فان

$$|f(T_n x)|^2 = |\langle T_n x, z \rangle|^2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} |\zeta_m|^2.$$

ان المتسلسلة الاخيرة هي باقي متسلسلة متقاربة • لذا فان الطرف الايسن يقترب من 0 عندما $n \longrightarrow \infty$ ، وبالتالي فان $f(T_n x) \longrightarrow 0 = f(0x)$ ، وهذا يعني أن (T_n) متقاربة بضعف مــن 0 •

بيد أن (T_n) ليست متقاربة بقوة ؛ ذلك أنــه اذا أخذنا $x=(1,0,0,\cdots)$ ، فانــه يكــون

$$\|T_m x - T_n x\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad (m \neq n). \quad \blacksquare$$

ان **الداليات الخطية** هي مؤثرات خطية (مداها في الحقل العددي **R** أو **C**)، وبالتالــي فــان (١) و (٢) و (٣) يمكــن تطبيقهــا مباشــرة • إلا أن (٢) و (٣) يغدوان متكافئين الآن للسبب التالي • كان لدينا من قبل $T_n x \in Y$ ، لكن لدينا الآن $f_n(x)$ ينتمي الى **R** (أو **C**) • لذا فان التقارب في (٢) و (٣) يتم الآن في الفضاء منتهي البعد (بل ووحيد البعد) **R** (أو **C**) ، وبالتالي فان (٢) و (٣) متكافئان استنادا الى (جـ) مــن المبرهنة ٤ــ٨ــ٤ • ويدعى المفهومان الباقيان **التقارب القوي والضعيف*** (الذي نقرأه « التقارب الضعيف نجمة ») :

٤ــ٩ــ٤ تعريف (تقارب متتاليات الداليات القوي والضعيف*)

لتكن (f_n) متتالية من الداليات الخطية المحدودة على فضاء منظم X • عندئذ :

(آ) يعني **التقارب القوي** لـ (f_n) أن ثمة داليــا $f \in X'$ بحيث يكــون $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$ • ونكتب هذا بالشكل

$$f_n \longrightarrow f.$$

(ب) يعني **التقارب الضعيف*** لـ (f_n) أن ثمة داليــا f مــن X' بحيث يكون $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ أيا كان x من X •ونكتب[1] هذا بالشكل

$$f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

يسمى f في(آ) و (ب) **النهاية القوية والنهاية الضعيفة*** لـ (f_n) تباعا • ∎

---

(١) هذا المفهوم اهم الى حد ما من مفهوم التقارب الضعيف لـ (f_n) الذي يعني ، كما سبق ورأينا في ٤ــ٨ــ٢ ، أن $g(f_n) \longrightarrow g(f)$ أيا كان g من X'' . هــذا ويقتضي التقارب الضعيف التقارب الضعيف* ، الامــر الذي يمكــن رؤيتــه باستعمال التطبيق القانوني المعرف في البند ٤ــ٦ (راجع المسألة ٤) .

وبالعودة الى المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ ، فيمكننا السؤال عما يمكن قوله حول مؤثر النهاية $T: X \longrightarrow Y$ في (١) و (٢) و (٣) •

فاذا كان التقارب منتظما فان $T \in B(X, Y)$ ، وفيما عدا ذلك لا يكون ل $\|T_n - T\|$ معنى • واذا كان التقارب قويا أو ضعيفا ، فان T يظل خطيا ، الا أنه قد يكون غير محدود اذا كان X غير تام •

مثال :

ان الفضاء X المؤلف من كل المتتاليات $x = (\xi_j)$ في l^2 التي كل حد فيها صفري باستثناء عدد منته من الحدود ، والمزودة بالمترك المعرف على l^2 ، ليس فضاء تاما • سنعرف متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة T_n على X بالمساواة

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \cdots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots),$$

وبالتالي فان حدود $T_n x$ من الشكل $j\xi_j$ اذا كان $j \leqq n$ ، ومن الشكل ξ_j اذا كان $j > n$ • ان هذه المتتالية تتقارب بقوة من مؤثر خطي غير محدود T معين بالمساواة $Tx = (\eta_j)$ ، حيث $\eta_j = j\xi_j$ •

بيد أنه اذا كان X تاما ، فلا يمكن أن يحدث الوضع الذي ورد في المثال السابق ، نظرا لانه عندئذ ترد التمهيدية الاساسية التالية :

٤ــ٩ــ٥ تمهيدية (التقارب القوي)

ليكن $T_n \in B(X, Y)$ حيث X فضاء باناخ و Y فضاء منظم • فاذا كانت المتتالية (T_n) متقاربة بقوة ، وكانت نهايتها T ، فان $T \in B(X, Y)$

البرهان :

ان خطية T تستخلص مباشرة من خطية T_n • وبما أن $T_n x \longrightarrow Tx$ أيا كان x من X ، فان المتتالية $(T_n x)$ محدودة أيا كان x ، راجع ١ــ٤ــ٢ • ولما كان X تاما ؛ فان $(\|T_n\|)$ محدودة استنادا الى مبرهنة المحدودية المنتظمة ، وليكن مثلا

$\|T_n\| \leqq c$ أيا كان n • يترتب على هذا أن $\|T_n x\| \leqq \|T_n\| \|x\| \leqq c\|x\|$ ، وهذا يقتضي أن يكـون $\|Tx\| \leqq c\|x\|$ • ∎

سنورد الآن معيارا مفيدا للتقارب القوي من خلال المبرهنة التالية :

٤ــ٩ــ٦ مبرهنة (التقارب القوي)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية (T_n) من المؤثرات $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث X و Y فضاء باناخ ، متقاربة بقوة هو أن يتحقق التالي :

(آ) ان تكون المتتالية $(\|T_n\|)$ محدودة

(ب) أن تكون المتتالية $(T_n x)$ متتالية كوشي في Y أيا كان x من مجموعة جزئية كليـة M من X •

البرهـان :

اذا كان $T_n x \longrightarrow Tx$ أيا كان x من X ، فـان (آ) ينتج مـن مبرهنـة المحدودية المنتظمة (نظرا لكون X تاما) ، ويكون (ب) تافها •

وبالعكس ، لنفترض أن (آ) و (ب) محققان ، وليكن مثلا $\|T_n\| \leqq c$ أيا كان n • لنأخذ أي x من X ولنثبت أن $(T_n x)$ متقاربة بقوة في Y • ليكن ε عددا موجبا معطى • لما كانت $\text{span}\, M$ كثيفة في X ؛ فانه يوجد y في $\text{span}\, M$ بحيث أن

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

وبما أن $y \in \text{span}\, M$ ، فان $(T_n y)$ هي متتالية كوشي وفق (ب) ، وبالتالي يوجد N بحيث أن

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (m, n > N).$$

وباستعمال هاتين المتباينتين وتطبيق متباينة المثلث ، فاننا نرى مباشرة أن $(T_n x)$ هي متتالية كوشي في Y ، ذلك أنه اذا كان m و n أي عددين طبيعيين يحققان الشرط $m, n > N$ فـان

$$\|T_nx - T_mx\| \leqq \|T_nx - T_ny\| + \|T_ny - T_my\| + \|T_my - T_mx\|$$

$$< \|T_n\| \|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_m\| \|x-y\|$$

$$< c\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + c\frac{\varepsilon}{3c} = \varepsilon.$$

وبما أن Y تام ، فان (T_nx) متقاربة في Y • ولما كان x عنصرا اختياريا في X ، فاننا نكون قد أثبتنا التقارب القوي للمتتالية (T_n) • ∎

٤ـ٩ـ٧ نتيجة (الداليات)

الشرط اللازم والكافي كي تكون متتالية (f_n) من الداليات الخطية المحدودة على فضاء باناخ ضعيفة* التقارب ، حيث يفترض ان النهاية دالي خطي محدود على X ، هو ان يتحقق التالي :

(آ) ان تكون المتتاليه $(\|f_n\|)$ محدودة •

(ب) ان تكون المتتالية $(f_n(x))$ متتالية كوشي ايا كان x من مجموعة جزئية كليـة M من X •

لهذه النظرية تطبيقات هامة ، سنورد اثنين منها في البنود اللاحقة •

مسـائل

١ ــ بين بأن التقارب المنتظـم $T_n \longrightarrow T$ ، حيث $T_n \in B(X, Y)$ ، يقتضي التقارب القوي ، كما تكون النهاية واحدة •

٢ ــ اذا كان $S_n, T_n \in B(X, Y)$ ؛ وكانت المتتاليتان (S_n) و (T_n) متقاربتين بقـوة من النهايتين S و T تباعا ، فبين أن $(S_n + T_n)$ متقاربة بقوة من النهاية $S+T$ •

٣ ــ بين بأن التقارب القـوي في $B(X, Y)$ يقتضي التقارب الضعيف ، كمـا تكـون النهايـة واحـدة •

٤ ــ بين بــأن التقارب الضعيف في الحاشية السفلى الواردة في الصفحة٣٤٢ تقتضي التقارب الضعيف* • بين بأن العكس يصح اذا كان X انعكاسيا •

٥ ــ لا يقتضي التقارب القوي التقارب المنتظم • بين صحة هذه الدعوى بأخذ $T_n = f_n : l^1 \longrightarrow \mathbf{R}$ حيث $f_n(x) = \xi_n$ و $x = (\xi_n)$ •

٦ ــ ليكن $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث $n = 1, 2, \cdots$ • كي ندرك الحافز على استخدام مصطلح « منتظم » الوارد في التعريف ٤ــ٩ــ١ ، بيــن بأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T_n \longrightarrow T$ هو أن يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N، **تابع لـ** ε **فقط** ، بحيث أنــه اذا كــان n أي عــدد طبيعــي يحقق الشرط $n > N$ ، وكان x أي عنصر من X نظيمه 1 ،فان

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon.$$

٧ ــ ليكن $T_n \in B(X, Y)$ ، حيث X فضاء باناخ • فاذا كانت (T_n) متقاربة بقوة ، فبين أن $(\|T_n\|)$ محدودة •

٨ ــ لنفترض أن $T_n \longrightarrow T$ ، حيث $T_n \in B(X, Y)$ • بين أنه يوجد لكل عدد موجب ε ولكــل كــرة مغلقة K محتواة في X عدد صحيح موجب N بحيــث تتحقق المتباينة $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$ أيا كان العــدد الطبيعي n المحقق للمتباينــة $n > N$ وأيا كان x في K •

٩ ــ بين أن $\|T\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|T_n\|$ في التمهيدية ٤ــ٩ــ٥ •

١٠ــ ليكن X فضاء فصولا لباناخ ، ولتكن M مجموعة جزئية محدودة في X' • بين بأن كل متتالية من عناصر M تحوي متتالية جزئية تتقارب بضعف* من عنصــر في X' •

٤ــ١٠ تطبيق على جموعية المتتاليات

للتقارب الضعيف* تطبيقات هامــة في نظــرية المتتاليات (والمتسلسلات)

المتباعدة . من المعلوم أنه لايوجد لمتتالية متباعدة نهاية بالمعنى المعتاد ، وما ترمي اليه نظرية المتتاليات المتباعدة هو أن نقـرن بمتتاليات متباعدة معينة « نهايـة » بمفهوم معمم.ويسمى الاجراء المتبع لادراك هذا الهدف « **طريقة في الجموعية** » .

وعلى سبيل المثال ، فاذا كانت $x=(\xi_k)$ متتالية معطاة ، فمن الممكن حساب المتتالية $y=(\eta_n)$ التي حدودها المتوسطات الحسابية التالية

$$\eta_1=\xi_1, \qquad \eta_2=\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2), \quad \cdots, \quad \eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n), \quad \cdots.$$

وهذا مثال على طريقة في الجموعية . فاذا تقاربت y من نهاية η (بالمعنى المعتاد) ، فاننانقول بأن x جموعة وفق الطريقة السابقة وأن لها **نهاية معممة** هي η . فمثلا اذا كـان

$$x=(0, 1, 0, 1, 0, \cdots) \quad \text{فـان} \quad y=(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{5}, \cdots)$$

وعندئذ يوجد لـ x النهاية المعممة $\frac{1}{2}$.

تسمى طريقة في الجموعية **طريقة مصفوفية** اذا أمكن تمثيلها بالشكل

$$y=Ax$$

حيث نكتب $x=(\xi_k)$ و $y=(\eta_n)$ على شكل متجهين عموديين غير منتهيين ؛ وحيث $A=(\alpha_{nk})$ مصفوفة غير منتهية ، وهنا $n, k=1, 2, \cdots$. ونستعمل في الدستور $y=Ax$ ضرب المصفوفات ، أي أن حدود y هي

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}\xi_k \qquad n=1, 2, \cdots. \tag{1}$$

ويوضح المثال السابق طريقة مصفوفية . (ما هي المصفوفة ؟) .

هنالك مصطلحات متعلقة بهذا الموضوع نوردها فيما يلي . تدعى الطريقـة المعطاة بـ (1) اختصارا **بالطريقة** A- ، ذلك أنه يرمز الى المصفوفة الموافقة .

A • واذا كانت المتسلسلات في (1) متقاربة جميعا ، وكانت $y=(\eta_n)$ متقاربة بالمعنى المعتاد ، فاننا نسمي نهايتها **النهاية** -A لـ x ، ونقول عن x انها **جموعة** -A • وتدعى مجموعة كل المتتاليات الجموعة -A **مـدى** الطريقة -A •

يقال عن طريقة-A انهـا **منتظمة (او دائمة)** اذا حوى مداها كل المتتاليات المتقاربة واذا كانت النهاية -A لكل متتالية منها مساوية للنهاية المعتادة ؛ أي أنه اذا كانـت

$$\xi_k \longrightarrow \xi \quad \text{تقتضـي} \quad \eta_n \longrightarrow \xi$$

من الواضح أن الانتظام متطلب طبيعي ، ذلـك أن كل طريقة لا يمكـن تطبيقها على متتاليات متقاربة معينة أو كانت تغير نهاية هذه المتتاليات لن تكون ذات فائدة عملية • ونورد فيما يلي معيارا أساسيا للانتظام •

٤ـ١٠ـ١ مبرهنة النهاية لطوبلتز (طرق الجموعية المنتظمة) •

الشرط اللازم والكافي كي تكون طريقة في الجموعية -A مصفوفتها $A=(\alpha_{nk})$ منتظمة هو أن يتحقق ما يلي :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{nk}=0 \qquad k=1,2,\cdots \quad \text{عندما} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}=1 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leqq \gamma \qquad n=1,2,\cdots \quad \text{عندما} \tag{4}$$

حيث γ ثابت لا يتعلق بـ n •

البرهـان :

سنبين أن

(آ) الشروط (2) و (3) و (4) لازمة للانتظام

(ب) الشروط (2) و (3) و (4) كافية للانتظام .

أما التفاصيل فهي التالية :

(آ) لنفترض أن الطريقة -A منتظمة ، ولتكن x_k متتالية بحيث أن الحد الذي ترتيبه k يساوي 1 ، وباقي الحدود أصفار . ونجد لـ x_k أن $\eta_n = \alpha_{nk}$ في (1) . بما أن x_k متقاربة ونهايتها 0 ، فان هذا يبين بأن (2) لابد أن تكون صحيحة .

كذلك ، فانه يوجد للمتتالية $x = (1, 1, 1, \cdots)$ النهاية 1 ، ونرى من (1) أن η_n تساوي الآن المتسلسلة الواردة في (3) . لذا فان (3) يجب أن تكون صحيحة .

سنبين أن (4) لازمة للانتظام . ليكن c فضاء باناخ المؤلف من كل المتتاليات المتقاربة حيث النظيم معرف بالمساواة

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|,$$

راجع ١ــ٥ــ٣ . سنورد الداليات الخطية f_{nm} على c المعرفة كالتالي :

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk}\xi_k \qquad m, n = 1, 2, \cdots . \tag{5}$$

إن كلا من f_{nm} محدود لان

$$|f_{nm}(x)| \leqq \sup_j |\xi_j| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}| = \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}|\right)\|x\|.$$

ان الانتظام يقتضي تقارب المتسلسلات في (1) أيا كان x في c . لذا فان (1) تعرف داليات خطية f_1 و f_2 و ... على c محددة كالتالي :

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k \qquad n = 1, 2, \cdots . \tag{6}$$

نستنتج من (5) أن $f_{nm}(x) \longrightarrow f_n(x)$ عندما $m \longrightarrow \infty$ أيا كان x من c . ان

هذا تقارب ضعيف* ، وبالتالي فان f_n محدودة وفق التمهيدية ٤ـ٩ـ٥ (عند وضع $T=f_n$) • كذلك ، فان $(f_n(x))$ متقاربة أيا كان x من c ، وبالتالي فان $(\|f_n\|)$ محدودة استنادا الى النتيجة ٤ـ٩ـ٧ ، وليكن مثلا

$$\|f_n\| \leqq \gamma \qquad \text{أيا كان } n \tag{7}$$

لنعرف ما يلي ، حيث $m \in \mathbf{N}$ اختياري

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} |\alpha_{nk}|/\alpha_{nk} & \text{اذا كان } k \leqq m \text{ و } \alpha_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{اذا كان } k > m \text{ أو } \alpha_{nk} = 0 \end{cases}$$

عندئذ يكون $x_{nm} = (\xi_k^{(n,m)}) \in c$ • كذلك فان $\|x_{nm}\| = 1$ اذا كان $x_{nm} \neq 0$ وان $\|x_{nm}\| = 0$ اذا كان $x_{nm} = 0$ • وفضلا عن ذلك فان

$$f_{nm}(x_{nm}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk}\xi_k^{(n,m)} = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}|$$

أيا كان m • لذا فان

$$(8) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}| = f_{nm}(x_{nm}) \leqq \|f_{nm}\| \\ \text{(b)} & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leqq \|f_n\|. \end{array}$$

وهذا يبين بأن المتسلسلة الواردة في (4) متقاربة • وهكذا فان (4) تنتج من (7) •

(ب) سنبين الآن بأن (2) و (3) و (4) شروط كافية للانتظام • سنعين داليا خطيا f على c كما يلي :

$$f(x) = \xi = \lim_{k\to\infty} \xi_k$$

حيث $x=(\xi_k)\in c$ • يمكن رؤية محدودية f من كون

$$|f(x)|=|\xi|\leqq \sup_j |\xi_j|=\|x\|.$$

لتكن $M\subset c$ مجموعة كل المتتاليات التي تتساوى حدودها بدءا من حد معين ، ونعني بذلك أنه اذا كانت $x=(\xi_k)$ مثلا ، فان

$$\xi_j=\xi_{j+1}=\xi_{j+2}=\cdots=\xi,$$

و j يعتمد على x • عندئذ يكون $f(x)=\xi$ كما في السابق ، ونجد في (1) و (6) أن

$$\eta_n=f_n(x)=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}\xi_k+\xi\sum_{k=j}^{\infty}\alpha_{nk}$$
$$=\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_{nk}(\xi_k-\xi)+\xi\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}.$$

لذا نجد استنادا الى (2) و (3) أن

$$\eta_n=f_n(x)\longrightarrow 0+\xi\cdot 1=\xi=f(x) \tag{9}$$

أيا كان x من M •

سنستعمل النتيجة ٤ـ٩ـ٧ ثانية ، وسنبين من ثم أن المجموعة التي عرفنا عليها التقارب المعبر عنه بـ (9) كثيفة في c • لتكن $x=(\xi_k)\in c$ ، وليكن $\xi_k\longrightarrow\xi$ • عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب N بحيث يكون

عندما $k\geqq N$ $\quad |\xi_k-\xi|<\varepsilon$

من الواضح أن

$$\tilde{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_{N-1},\xi,\xi,\xi,\cdots)\in M$$

وأن

$$x-\bar{x}=(0,\cdots,0,\xi_N-\xi,\xi_{N+1}-\xi,\cdots).$$

يترتب على هذا أن $\|x-\bar{x}\|\leqq\varepsilon$ • ولما كان $x\in c$ اختياريا ، فان هذا يبين أن M كثيفـة في c •

وأخيرا ، فاننا نستنتج من (4) أن

$$|f_n(x)|\leqq\|x\|\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|\leqq\gamma\|x\|$$

أيا كان $x\in c$ ، وأيا كان n • لـذا فان $\|f_n\|\leqq\gamma$ ، أي أن $(\|f_n\|)$ محدودة • وفضلا عن ذلك ، فان (9) تعني التقارب $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ أيا كان x في المجموعة الكثيفة M ، وهذا يقتضي بناء على النتيجة ٤ـ٩ـ٧ التقارب الضعيف* $f_n \xrightarrow{w^*} f$ • وهكذا نكون قد بينا أنه اذا كانت $\xi=\lim\xi_k$ موجودة ، فان $\eta_n\longrightarrow\xi$ • وهذا يعني تعريفا الانتظام ، ونكون بهذا قد أثبتنا صحة المبرهنة •∎

مسائل

١ ـ تعرف طريقة شيزارو C_1 في الجموعية بالدستور

$$\eta_n=\frac{1}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n) \qquad n=1,2,\cdots,$$

أي أننا نأخذ المتوسطات الحسابية • أوجد المصفوفة الموافقة A •

٢ ـ طبق الطريقة C_1 في المسألة ١ على المتتاليتين

$$(1,0,1,0,1,0,\cdots) \quad \text{و} \quad \left(1,0,-\frac{1}{4},-\frac{2}{8},-\frac{3}{16},-\frac{4}{32},\cdots\right).$$

٣ ـ عبر عن (ξ_n) في المسألة ١ بدلالة (η_n) • أوجد المتتالية (ξ_n) بحيث يكون $(\eta_n)=(1/n)$ •

٤ ـ استخدم الدستور الوارد في المسألة ٣ للتوصل الى متتالية غير جموعة بالطريقة C_1 •

٥ ـ تعرف **طرق هولدر H_p في الجموعية** كما يلي : H_1 مطابقة للطريقة C_1 في المسألة ١ • أما الطريقة H_2 فتتألف من تطبيقين متتاليين لـ H_1 ، أي أننا نأخذ أولا المتوسط الحسابي ، ثم نأخذ ثانية المتوسطات الحسابية لتلك المتوسطات • وأما H_3 فيتألف من ثلاث تطبيقات متتالية لـ H_1 ، وهكذا • طبق H_1 و H_2 على المتتالية $(1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots)$ وقدم التعليق المناسب •

٦ ـ **(المتسلسلات)** نقول عن متسلسلة غير منتهية أنها جموعة -A اذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية جموعة -A ، وتسمى النهاية -A لتلك المتتالية **المجموع** -A للمتسلسلة • بين أن $1+z+z^2+\cdots$ جموعة -C_1 وأن $|z|=1$ و $z\neq 1$ ، وأن المجموع -C_1 هو $1/(1-z)$. •

٧ ـ **(طريقة -C_k لشيزارو)** • لنفترض أن (ξ_n) متتالية ، وأن $\sigma_n^{(0)}=\xi_n$ وأن

$$\sigma_n^{(k)}=\sigma_0^{(k-1)}+\sigma_1^{(k-1)}+\cdots+\sigma_n^{(k-1)} \qquad (k\geqq 1, n=0, 1, 2, \cdots).$$

فاذا أوجدنا لعنصر مثبت k من N أن $\eta_n^{(k)}=\sigma_n^{(k)}/\binom{n+k}{k}\longrightarrow\eta$ قلنا إن (ξ_n) جموعة -C_k وان η هي **النهاية** -C_k لها • بين بأن هذه الطريقة تفيد في أنه يمكن تمثيل $\sigma_n^{(k)}$ بدلالة الحدود ξ_j بصورة جد بسيطة ، ونعني بها

$$\sigma_n^{(k)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+k-1-\nu}{k-1}\xi_\nu.$$

٨ ـ إن **طريقة أولر** للمتسلسلات تقرن بمتسلسلة معطاة

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j \qquad \text{المتسلسلة المحولة} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$$

حيث

$$\Delta^0 a_j=a_j, \qquad \Delta^n a_j=\Delta^{n-1}a_j-\Delta^{n-1}a_{j+1}, \qquad j=1, 2, \cdots,$$

وحيث أوردنا $(-1)^j$ كي نبين بأن a_j ليست موجبة بالضرورة • يمكـن الاثبات بأن الطريقة منتظمة ، وبالتالي فان تقارب المتسلسلة المعطاة يقتضي تقارب المتسلسلة المحولة ، والمجموع واحـد • بين بأن الطريقة تعطـي الدسـتور

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots.$$

٩ ــ بين بأن طريقة أولر في المسألة ٨ تعطي الدستور

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots\right).$$

١٠ــ بين أن طريقة أولر تعطي النتيجة التالية ، واعط التعليق المناسب

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n.$$

٤ــ١١ المكاملة العددية والتقارب الضعيف*

للتقارب الضعيف* تطبيقات مفيدة في المكاملة العددية والمفاضلة والاستكمال • وسنعنى في هذا البند بالمكاملة العددية ؛ أي بمسألة الحصول على القيم التقريبية لتكامل معطى

$$\int_a^b x(t)\, dt.$$

ونظرا لكون المسألة هامة في التطبيقات ، فقد تم تطوير طرق متنوعة لهذا الغرض ، كقاعدة شبه المنحرف ، وقاعدة سمبسون ، ودساتير أخرى أكثر تعقيدا مثل دساتير نيوتن ــ كوتس وغوص • (لمراجعة بعض الحقائق الاولية ، راجع مجموعة المسائل في نهاية البند) •

ان السمة المشتركة بين هذه الطرق وغيرها هي أننا نختار أولا نقاطا في $[a, b]$ ، تسمى **عقدا** ، ثم نقرب القيمة المجهولة للتكامل باستخدام تركيب خطي لقيم x في العقد . وتعتمد العقد ومعاملات التركيب الخطي على الطريقة المستخدمة ، وليس على الدالة المكاملة x . وبالطبع ، فان الفائدة التي نجنيها من تطبيق طريقة ما تتحدد الى حد كبير بدقتها ، وقد تتطلب ازدياد الدقة كلما ازداد عدد العقد .

سنرى في هذا البند أنه يمكن للتحليل الدالي أن يقدم عونا في هذا المجال . وفعلا ، فاننا سنشرح الخلفية العامة لتلك الطرق ، ثم نبحث في مسألة التقارب عند ازدياد عدد العقد .

سنُعنَى هنا بالدوال المستمرة ، وهذا يوحي باستعمال فضاء باناخ $X = C[a, b]$ المؤلف من كل الدوال الحقيقية على $J = [a, b]$ والمزود بالنظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)|.$$

عندئذ يعرف التكامل الذي أوردناه في بداية البند داليا خطيا f على X معرفا بالمساواة

$$f(x) = \int_a^b x(t)\, dt. \tag{1}$$

وللحصول على دستور للمكاملة العددية ، فقد ننهج أسلوبا مماثلا للاسلوب المتبع في الطرائق المذكورة آنفا . وبالتالي فاننا نختار لكل عدد صحيح موجب n الاعداد الحقيقية التالية

$$t_0^{(n)}, \cdots, t_n^{(n)}$$

التي تسمى **عقدا** ، والتي عددها $n+1$ ، بحيث أن

$$a \leqq t_0^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqq b. \tag{2}$$

بعدئذ نختار الاعداد الحقيقية

$$\alpha_0^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$$

التي تسمى **معاملات** ، والتي عددها $n+1$ ، ومن ثم تعرف الداليات f_n على X بالمساويات

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

ان هذه طريقة عددية في المكاملة ، وتمثل قيمة $f_n(x)$ تقريبا لـ $f(x)$ ، حيث x معطى • وللتعرف على دقة هذه الطريقة ؛ فاننا ندرس الداليات f_n على النحو التالــي •

ان كل f_n محدود لأن $|x(t_k^{(n)})| \leqq \|x\|$ وفق تعريف النظيم • لذا فان

$$|f_n(x)| \leqq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| |x(t_k^{(n)})| \leqq \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \right) \|x\|. \tag{4}$$

سنبين الآن أمرا يفيدنا فيما بعد ، وهو أن نظيم f_n يعطى بالمساواة

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|. \tag{5}$$

وفعلا ، فان (4) تبين بأن قيمة $\|f_n\|$ لا يمكنها أن تتجاوز الطرف الايمن مـن (5) ، وبالتالي فان المساواة تنتج اذا أخذنا x_0 من X بحيث أن $|x_0(t)| \leqq 1$ عــلـى J وأن

$$x_0(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{اذا كان } \alpha_k^{(n)} \geqq 0 \\ -1 & \text{اذا كان } \alpha_k^{(n)} < 0 \end{cases}$$

وذلك لانه يكون عندئذ $\|x_0\| = 1$ ، ويكون

$$f_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \operatorname{sgn} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|.$$

اذا كان x عنصرا معطى من X فان الدستور (3) يعطي قيمة تقريبية $f_n(x)$ لـ $f(x)$ في (1) • وبالطبع ، فاننا معنيون بالدقة كما ذكرنا قبل قليل ، ونحن نبغي أن تزيد هذه الدقة مع تزايد n • ان هذا يوحي بالمفهوم التالي :

٤ــ١١ــ١ تعريف (التقارب)

يقال عن الطريقة العددية في المكاملة المعرفة بـ (3) انهـا **متقاربة** من أجـل عنصر $x \in X$ اذا كان

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad (n \longrightarrow \infty), \tag{6}$$

حيث f معرف بـ (1) • ∎

كذلك ، لما كانت المكاملة التامة للحدوديات سهلة ، فمن الطبيعي أن نعمل التالـي :

٤ــ١١ــ٢ متطلب

اذا كان n عددا طبيعيا ما ، وكان f حدوديا درجته لا تتجاوز n ، فان

$$f_n(x) = f(x). \tag{7}$$ ∎

لما كانت الداليات f_n خطية ، فيكفي أن تتطلب (7) للقوى $n+1$ المعرفة كمـا يلـي

$$x_0(t) = 1, \qquad x_1(t) = t, \qquad \cdots, \qquad x_n(t) = t^n.$$

وفعلا ، فاننا نجد عندئذ للحدودي من الدرجة n المعطى بالمساواة $x(t) = \sum \beta_j t^j$ أن

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f_n(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(x_j) = f(x).$$

نرى بأننا هكذا نحصل على الشروط الـ $n+1$ التالية

$$f_n(x_j) = f(x_j) \qquad j=0,\cdots,n. \tag{8}$$

سنبين أنه يمكن تحقيق هذه الشروط • بما أن الوسطاء $2n+2$ متيسرة ، ونعني بها $n+1$ من العقد و $n+1$ من المعاملات ، فمن الممكن اختيـار بعضهـا بصورة كيفية • لنختر العقد $t_k^{(n)}$ ، ولنثبت أنه يمكننا عندئذ تعيين تلك المعاملات بصورة وحيدة •

لدينا في (8) الآن $x_j(t_k^{(n)}) = (t_k^{(n)})^j$ ، وبالتالي فان (8) تأخذ الشكل

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} (t_k^{(n)})^j = \int_a^b t^j \, dt = \frac{1}{j+1}(b^{j+1} - a^{j+1}) \tag{9}$$

حيث $j=0,\cdots,n$ • واذا كان n عددا مثبتا ما ، فان هذا هو جملة غير متجانسة من $n+1$ من المعادلات الخطية في $n+1$ مـن المجاهيل هـي $\alpha_0^{(n)}, \cdots, \alpha_n^{(n)}$ • ويوجد حل وحيد اذا كان للجملة المتجانسة الموافقة

$$\sum_{k=0}^{n} (t_k^{(n)})^j \gamma_k = 0 \qquad (j=0,\cdots,n)$$

الحل التافه فقط $\gamma_0 = 0 , \cdots , \gamma_n = 0$ أي اذا تحقق الشيء نفسه للجملة

$$\sum_{j=0}^{n} (t_k^{(n)})^j \gamma_j = 0 \qquad (k=0,\cdots,n) \tag{10}$$

التي مصفوفة معاملاتها هي منقول مصفوفة المعاملات للجملة السابقة • ان هـذا صحيح نظرا لكون (10) تعني أن الحدودي

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j t^j$$

الذي هو من الدرجة n ، صفر في العقد التي عددها $n+1$ ، وبالتالي فانه يجب أن يطابق الصفر ، أي أن تكون كل معاملات γ_j أصفارا • ∎

وهكذا فان النتيجة التي خلصنا اليها تنص على أنه يوجد لكل اختيار للعقد

يحقق (2) معاملات تتحدد بصورة وحيدة بحيث يكون المتطلب ٤ــ١١ــ٢ محققاً. لذا فان الطريقة الموافقة متقاربة من أجل جميع الحدوديات . لنطرح الآن السؤال حول الشروط الاضافية التي يجب فرضها كي تكــون الطريقة متقاربة آيا كانت الدوال الحقيقية المستمرةعلى $[a, b]$. وقد توصل پوليــا عام ١٩٣٣ م. في هــذا الصدد الى المبرهنة التالية :

٤ــ١١ــ٣ مبرهنة بوليا في التقارب (التكامل العددي)

الشرط اللازم والكافي كي تكون طريقة المكاملــة العددية (3) التــي تحــقق ٤ــ١١ــ٢ متقاربة أيا كانت الدوال الحقيقية المستمرة علــى $[a, b]$ هو أن يوجــد عــدد c بحيث أن

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| \leqq c \qquad (11)$$

أيا كان n

البرهــان :

ان المجموعة W لكل الحدوديات ذات المعاملات الحقيقية كثيفة في الفضاء الحقيقي $X = C[a, b]$ استنادا الى مبرهنة ڤير شتراس في التقريب (التي سنورد برهانها بعد قليل) ، ونجد أنه أيا كان x من W فان التقارب حاصل استنادا الى ٤ــ١١ــ٢ . ويترتب على (5) أن الشرط اللازم والكافي كــي تكــون $(\|f_n\|)$ محدودة هو أن تتحقق المتباينة (11) من أجل عــدد حقيقي ما c . ان صحــة مبرهنتنا تستخلص الآن من النتيجة ٤ــ٩ــ٧ نظرا لكون التقارب $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ أيا كان x من X تقاربا ضعيفا* $f_n \xrightarrow{w^*} f$. ∎

من الواضح جدا أنه يمكننا في هذه المبرهنة الاستعاضة عن الحدوديات بأي مجموعة أخرى كثيفة في الفضاء الحقيقي $C[a, b]$.

وفضلا عن ذلك ، ففي أغلب طرق المكاملة تكون المعاملات غير سالبة جميعاً. وبأخذ $x = 1$ ، فاننا نجد استنادا الى ٤ــ١١ــ٢ أن

$$f_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| = f(1) = \int_a^b dt = b - a,$$

لذا فان (11) صحيحة ، وهذا يثبت ما يلي :

٤ــ١١ــ٤ مبرهنة ستيكلوف (المكاملة العددية)

ان طريقة المكاملة العددية (3) التي تحقق ٤ــ١١ــ٢ والتي لها معاملات غير سالبة $\alpha_k^{(n)}$ تتقارب أيا كانت الدالة المستمرة .

استخدمنا في برهان ٤ــ١١ــ٣ المبرهنة التالية :

٤ــ١١ــ٥ مبرهنة فيرشتراس في التقريب (الحدوديات)

ان مجموعة كل الحدوديات W ذات المعاملات الحقيقية كثيفة في الفضاء الحقيقي $C[a, b]$.

لذا فانه يوجد لكل x من $C[a, b]$ ولكل عدد موجب ε حدودي p يحقق المتباينة $|x(t)-p(t)|<\varepsilon$ أيا كان t من $[a, b]$.

البرهان :

كل x من $C[a, b]$ منتظمة الاستمرار على $J=[a, b]$ نظرا لكون J متراصة . لذلك فانه يوجد لاي عدد موجب ε دالة y بيانها قوس من مضلع بحيث أن

$$\max_{t \in J} |x(t)-y(t)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

سنفترض أولا أن $x(a)=x(b)$ و $y(a)=y(b)$. لما كانت y مؤلفة من دوال خطية ومستمرة ، فان معاملات فوريه لها ذات حدود من الشكل

$$|a_0|<k, \ |a_m|<k/m^2, \ |b_m|<k/m^2.$$

ويمكن رؤية هذا بتطبيق المكاملة بالتجزئة على الدستورين اللذين يعطيان a_m و b_m (راجع ٣ــ٥ــ١ حيث لدينا $[a, b]=[0, 2\pi]$) . (راجع أيضا المسألة ١٠ في نهاية هذا البند) . لذا فاننا نجد لمتسلسلة فوريه لـ y (الممثلة للتمديد الدوري لـ y ، بدور يساوي $b-a$) ، لدى كتابة $\kappa=2\pi/(b-a)$ للبساطة أن

$$(13) \quad \left| a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \kappa mt + b_m \sin \kappa mt) \right| \leqq 2k\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) = 2k\left(1 + \frac{1}{6}\pi^2\right).$$

وهذا يبين بأن المتسلسلة تتقارب بانتظام على J • وبالتالي فاننا نجد أن المجموع الجزئي الـ n ، وهو s_n ، حيث n كبير كفاية ؛ يحقق المتباينة

$$(14) \qquad \max_{t \in J} |y(t) - s_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ان متسلسلات تايلور لدوال الجيوب وجيوب التمام في s_n تتقارب بانتظام أيضا على J ، وبالتالي فهناك حدودي p (نجده مثلا من مجاميع جزئية مناسبة لهذه المتسلسلات) بحيث أن

$$\max_{t \in J} |s_n(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

يترتب على هذا وعلى (12) و (14) وعلى

$$|x(t) - p(t)| \leqq |x(t) - y(t)| + |y(t) - s_n(t)| + |s_n(t) - p(t)|$$

أن

$$(15) \qquad \max_{t \in J} |x(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

وهذا يصح أيا كانت x في $C[a, b]$ المحققة للشرط $x(a) = x(b)$ • أما اذا كان $x(a) \neq x(b)$ ، فاننا نأخذ $u(t) = x(t) - \gamma(t-a)$ ، ونأخذ γ بحيث يكون $u(a) = u(b)$ • عندئذ نجد لـ u حدوديا q يحقق المتباينة $|u(t) - q(t)| < \varepsilon$ على J • لذا فان $p(t) = q(t) + \gamma(t-a)$ تحقق (15) لان $x - p = u - q$ • ولما كان العدد الموجب ε اختياريا ، فاننا نكون قد بينا أن W كثيفة في $C[a, b]$ • ∎

ان أول اثبات لهذه المبرهنة قدمه ڤير شتراس عام ١٨٨٥ م• ، وثمة براهين

عديدة أخرى ، احدها أتى به بير نشتاين عام ١٩١٢م• ، وهو يعطي متتالية متقاربة بانتظام من الحدوديات (« حدوديات بير نشتاين ») بصورة ظاهرة بدلالة x •
ويمكن العثور على برهان بير نشتاين في الصفحتين 8 و 9 من كتاب :

Yosida, K. (1971), *Functional Analysis.* 3rd ed. Berlin: Springer

مسـائل

١ ـ ان **قاعدة المستطيل** هي (الشكل ٤٥)

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx h[x(t_1^*)+\cdots+x(t_n^*)], \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

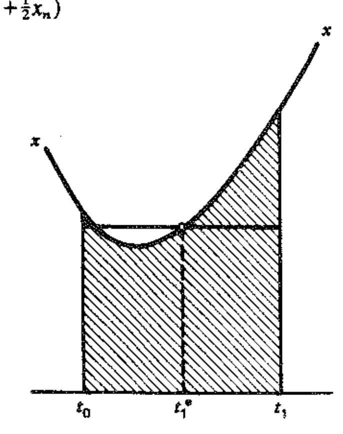
حيث $t_k^* = a+(k-\frac{1}{2})h$ • كيف يمكن الحصول على هذا الدستور ؟ ما هي العقد وما هي المعاملات ؟ كيف يمكن الحصول علـى حدي الخطأ للقيمـة التقريبية المحسوبة بهذا الدستور ؟

٢ ـ **إن قاعدة شبه المنحرف** هى (الشكل ٤٦)

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt \approx \frac{h}{2}(x_0+x_1), \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

أو

$$\int_a^b x(t)\,dt \approx h(\tfrac{1}{2}x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}+\tfrac{1}{2}x_n)$$



الشكل (٤٥) • قاعدة المستطيل

الشكل (٤٦) • قاعدة شبه المنحرف

حيث $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$. اشرح كيفية الحصول على الدساتير اذا قربنا x بدالة مؤلفة من أجزاء خطية .

٣ ـ ان **قاعدة سمبسون** هي (الشكل ٤٧) .

$$\int_{t_0}^{t_2} x(t)\, dt \approx \frac{h}{3}(x_0 + 4x_1 + x_2) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

أو

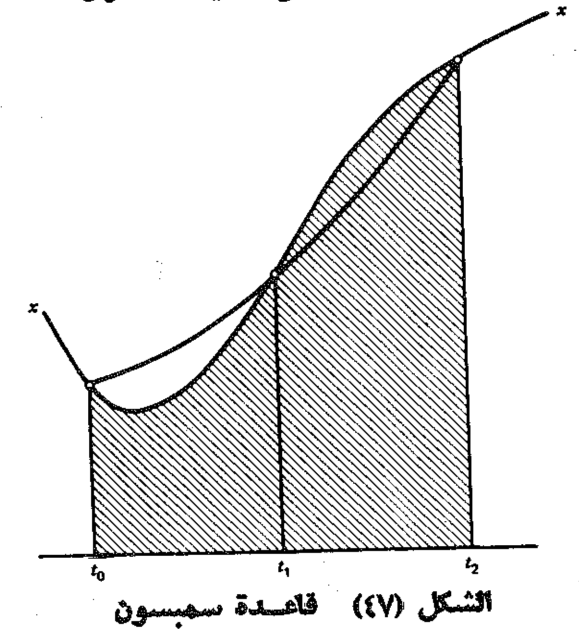
$$\int_a^b x(t)\, dt \approx \frac{h}{3}(x_0 + 4x_1 + 2x_2 + \cdots + 4x_{n-1} + x_n)$$

حيث n زوجي و $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$. بين بأننا نجد هذه الدساتير اذا قربنا x على $[t_0, t_2]$ بحدودي من الدرجة الثانية قيمه في النقاط t_0 ، t_1 ، t_2 تساوي قيم x في هذه النقاط . ونجد نتيجة مماثلة في $[t_2, t_4]$ ، وهكذا .

٤ ـ ليكن $f(x) = f_n(x) - \varepsilon_n(x)$ ، حيث f_n هو التقريب الذي نحصل عليه باستخدام قاعدة شبه المنحرف . بأنه اذا كانت x أي دالة مشتقاها من المرتبة الاولى والثانية مستمران ، فان حدي الخطأ هما

$$k_n m_2^* \leqq \varepsilon_n(x) \leqq k_n m_2 \qquad \text{حيث} \qquad k_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

حيث m_2 و m_2^* هما القيمة العظمى والقيمة الصغرى لـ x'' على $[a, b]$.



الشكل (٤٧) قاعدة سمبسون

٥ ــ تستعمل قاعدة سمبسون بصورة واسعة في التطبيقات• وكي نشعر بزيادة الدقة ، فاننا نطبق كلا مــن قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون في الحالة $n = 10$ على التكامل

t	e^{-t^2}
0	1.000 000
0.1	0.990 050
0.2	0.960 789
0.3	0.913 931
0.4	0.852 144
0.5	0.778 801
0.6	0.697 676
0.7	0.612 626
0.8	0.527 292
0.9	0.444 858
1.0	0.367 879

$$I = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt$$

ونقارن القيمتين

0.746825 و 0.746211

بالقيمة الحقيقية 0.746824 (مقربة الى ستة أرقام عشرية) •

٦ ــ بين باستعمال المسألة ٤ أن حدي الخطأ في 0.746 211 في المسألة ٥ همـا 0.001 667− و 0.000 614 ، بحيث أن

$$0.745\,597 \leqq I \leqq 0.747\,878.$$

٧ ــ إن **قاعدة الثمانيات الثلاث** هي

$$\int_{t_0}^{t_3} x(t)\, dt \approx \frac{3h}{8}(x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3)$$

حيث $x_k = x(t_k)$ و $t_k = a + kh$ • بين أنه يمكن الحصول على هذا الدستور اذا قربنا x على $[t_0, t_3]$ بحدودي من الدرجة الثالثة يساوي x في العقد t_0 ، t_1 ، t_2 ، t_3 • (ان القواعد الواردة في المسائل ٢و٣و٧ هي الحدود الاولى في متتالية دساتير نيوتن ــ كوتس) •

٨ ــ لننظر في دستور المكاملة

$$\int_{-h}^{h} x(t)\, dt = 2hx(0) + r(x)$$

حيث r هو الخطأ • لنفرض أن $x \in C^1[-h, h]$ ، أي أن x دالة ذات مشتق

مستمر على $J=[-h, h]$ • بين أنه يمكن تقدير الخطأ بالمتباينة

$$|r(x)| \leqq h^2 p(x)$$

حيث

$$p(x)=\max_{t \in J} |x'(t)|.$$

بين بأن p هو نصف نظيم على الفضاء المتجهي لتلك الدوال (راجع المسألة ١٢ من البند ٢ــ٣) •

٩ ــ اذا كانت x دالة حقيقية تحليلية ، فبين أن

$$\int_{-h}^{h} x(t)\, dt = 2h\left(x(0)+x''(0)\frac{h^2}{3!}+x^{\mathrm{IV}}(0)\frac{h^4}{5!}+\cdots\right). \tag{16}$$

خذ للتكامل عبارة تقريبية من الشكل $2h(\alpha_{-1}x(-h)+\alpha_0 x(0)+\alpha_1 x(h))$ وعين $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$ بحيث أن أكبر قدر ممكن من القوى h, h^2, و ••• يتفق مع (16) •
بين بأن هذا يعطي قاعدة سمبسون

$$\int_{-h}^{h} x(t)\, dt \approx \frac{h}{3}(x(-h)+4x(0)+x(h)).$$

لماذا تبين هذه الطريقة بأن القاعدة تامة للحدوديات من الدرجة الثالثة •

١٠ــ في برهاننا لمبرهنة فير شتراس في التقريب ، استخدمنا حدود معاملات فورييه لدالة مستمرة ممثلة بدوال خطية • كيف يمكن الحصول على هذه الحدود ؟

٤ــ١٢ مبرهنة التطبيق المفتوح

بحثنا في هذا الفصل في مبرهنة هان ــ باناخ ومبرهنة المحدودية المنتظمة • وسننتقل الآن الى دراسة المبرهنة « الكبيرة » الثالثة في هذا الفصل ، ألا وهي مبرهنة التطبيق المفتوح • تُعنَى هذه المبرهنة بالتطبيقات المفتوحة ؛ وهي التطبيقات

التي تكون صورة أي مجموعة مفتوحة وفقها مجموعة مفتوحة (التعريف وارد بعد قليل) • واذا أعدنا الى الذاكرة ما سبق وقلناه حول أهمية المجموعات المفتوحة (في البند ١ـ٣) ، فاننا ندرك بأن التطبيقات المفتوحة تتمتع بأهمية بالغة• وبصورة أكثر تحديدا ، فان مبرهنة التطبيق المفتوح تقدم الشروط التي لو تحققت لغدا المؤثر الخطي المحدود تطبيقا مفتوحا • وكما هي الحال في مبرهنة المحدودية المنتظمة ، فاننا نحتاج ثانية الى التمام ، وتقدم المبرهنة الحالية سببا آخر لكون فضاءات باناخ أنجع من الفضاءات المنظمة غير التامة • كذلك ، فان المبرهنة تحدد الشروط التي لو توفرت لكان عكس مؤثر خطي محدود محدودا أيضا • هذا ، وان اثبات مبرهنة التطبيق المفتوح يستند الى مبرهنة بير في الفئات التي سبق وأوردنا نصها واثباتها في البند ٤ـ٧ •

سنبتدىء بتقديم مفهوم التطبيق المفتوح •

٤ـ١٢ـ١ تعريف (التطبيق المفتوح)

ليكن X و Y فضاءين متريين • عندئذ يسمى التطبيق $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ الذي ساحته $\mathscr{D}(T)$ جزء من X **تطبيقا مفتوحا** اذا كانت صورة أي مجموعة مفتوحة في $\mathscr{D}(T)$ مجموعة مفتوحة في Y • ∎

لاحظ أنه اذا كان التطبيق غير غامر ، فانه يلزم التمييز بين قولنا بأن التطبيق مفتوح كتطبيق من $\mathscr{D}(T)$

(آ) في Y ،
(ب) على مداه •

إن (ب) أضعف من (آ) • وعلى سبيل المثال ، فاذا كان $X \subset Y$ ، كان الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $x \longmapsto x$ لـ X في Y مفتوحا هو أن تكون X مجموعة جزئية مفتوحة في Y ، في حين أن التطبيق $x \longmapsto x$ لـ X على مداه (الذي هو X) مفتوح في كل الحالات •

هذا ، وللتخلص من اللبس ، علينا أن نذكر استنادا الى المبرهنة ١ـ٣ـ٤ ،

أن التطبيق المستمر $T: X \longrightarrow Y$ يتمتع بخاصة كون الصورة العكسية لاي مجموعة مفتوحة في Y وفق T هي مجموعة مفتوحة في X ؛ وهذا لا يقتضي أن تكون صورة المجموعة المفتوحة في X وفق T مجموعة مفتوحة في Y • فمثلا ، ان التطبيق $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ المحدد بالقاعدة $t \longmapsto \sin t$ مستمر ، ومع ذلك فان صورة $(0, 2\pi)$ وفقه هي $[-1, 1]$ •

٤–١٢–٢ مبرهنة التطبيق المفتوح ومبرهنة العكس المحدود

ان المؤثر الخطي المحدود T من فضاء باناخ X على فضاء باناخ Y هو تطبيق مفتوح • وهكذا فاذا كان T متباينا وغامرا ، فان T^{-1} مستمر ومحدود •

ان البرهان ينتج مباشرة من التمهيدية التالية :

٤–١٢–٣ تمهيدية (الكرة الواحدية المفتوحة)

يتمتع المؤثر الخطي المحدود T من فضاء باناخ X على فضاء باناخ Y بخاصة كون الصورة $T(B_0)$ للكرة الواحدية المفتوحة $B_0 = B(0; 1) \subset X$ تحوي كرة مفتوحة حول النقطة 0 في Y •

البرهان :

سنقدم الاثبات وفق الخطوات التالية :

(آ) تثبت بأن لصاقة صورة الكرة المفتوحة $B_1 = B(0; \frac{1}{2})$ تحوي كرة مفتوحة B^* •

(ب) نبين بأن $\overline{T(B_n)}$ تحوي كرة مفتوحة V_n حول النقطة 0 في Y ، حيث $B_n = B(0; 2^{-n}) \subset X$ •

(جـ) نبرهن على أن $T(B_0)$ تحوي كرة مفتوحة حول النقطة 0 في Y •

أما التفاصيل فهي على النحو التالي :

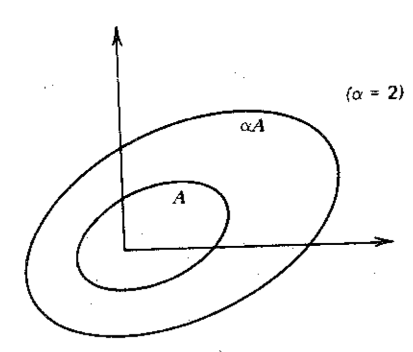
(آ) فيما يتعلق بالمجموعات الجزئية A من X ، فاننا سنستعمل الرمزين

αA (حيث α عدد) و $A+w$ $(w \in X)$ اللذين يعنيان أن

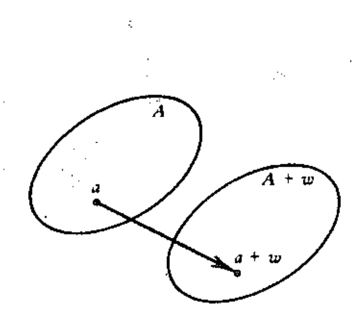
$$\alpha A = \{x \in X \mid x = \alpha a, a \in A\} \quad (1)$$

$$A + w = \{x \in X \mid x = a + w, a \in A\} \quad (2)$$

ونستعمل رمزين مماثلين للمجموعات الجزئية من Y •



الشكل (٤٨)•ايضاح الدستور (1)



الشكل•(٤٩) ايضاح الدستور (2)

لنأخذ الكرة المفتوحة $B_1 = B(0; \frac{1}{2}) \subset X$ • ان كل عنصر مثبت x من X موجود في kB_1 ، حيث k عدد حقيقي كبير بقدر كاف $(k > 2\|x\|)$ • لذا فان

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

ولما كان T غامرا وخطيا فان

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)}. \quad (3)$$

لاحظ أنه عندما أخذنا اللصاقات لم نضف نقاطا أخرى للاجتماع ، ذلك أن هذا الاجتماع سبق وساوى الفضاء Y بأكمله • وبما أن Y تام ، فانه ليس هزيلا في نفسه ، استنادا الى مبرهنة بير في الفئات ٤ــ٧ــ٢ • وبالتالي ، فاذا لاحظنا أن (3) مماثلة لـ (1) في ٤ــ٧ــ٢ ، فاننا نستنتج أن $\overline{kT(B_1)}$ يجب أن

تحوي كرة مفتوحة ما • وهذا يقتضي أن $\overline{T(B_1)}$ تحوي أيضا كـرة مفتوحة ، ولكن $B^* = B(y_0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)}$ • يترتب على هذا أن

$$B^* - y_0 = B(0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0. \qquad (4)$$

(ب) سنبرهن بأن $B^* - y_0 \subset \overline{T(B_0)}$ ، حيث B_0 واردة في نص المبرهنة • سنقوم بهذا باثبات أن [راجع (4)]

$$\overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)}. \qquad (5)$$

ليكن $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ • عندئذ يكون $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$ ، ونذكر أن $y_0 \in \overline{T(B_1)}$ أيضا • واستنادا الى (آ) من ١ــ٤ــ٦ فهنالك

$u_n = Tw_n \in T(B_1)$ بحيث أن $u_n \longrightarrow y + y_0$

$v_n = Tz_n \in T(B_1)$ بحيث أن $v_n \longrightarrow y_0$

وبما أن w_n و z_n ينتميان الى B_1 ، وأن نصف قطر B_1 هو $\frac{1}{2}$ ، فان

$$\|w_n - z_n\| \leqq \|w_n\| + \|z_n\| < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1,$$

وبالتالي فان $w_n - z_n \in B_0$ • ونرى من

$$T(w_n - z_n) = Tw_n - Tz_n = u_n - v_n \longrightarrow y$$

أن $y \in \overline{T(B_0)}$ • ولما كان $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ اختياريا ، فان (5) صحيحة • وهكذا فانه يترتب على (4) أن

$$B^* - y_0 = B(0; \varepsilon) \subset \overline{T(B_0)}. \qquad (6)$$

ليكن $B_n = B(0; 2^{-n}) \subset X$ • بما أن T خطي ، فان $\overline{T(B_n)} = 2^{-n}\,\overline{T(B_0)}$ • لذا فاننا نستنتج من (6) أن

$$V_n = B(0; \varepsilon/2^n) \subset \overline{T(B_n)}. \qquad (7)$$

(ج) سنبرهن أخيرا بأن

$$V_1 = B(0;\tfrac{1}{2}\varepsilon) \subset T(B_0)$$

وذلك باثبات أن كل y من V_1 ينتمي الى $T(B_0)$ • وهكذا لنفرض أن $y \in V_1$ • نستنتج من (7) بفرض $n=1$ أن $V_1 \subset \overline{T(B_1)}$ • لذا فان $y \in \overline{T(B_1)}$ • واعتمادا على (آ) من ١ــ٤ــ٦ ، فلابد من وجود عنصر v في $T(B_1)$ قريب من y ،ولنفرض مثلا أن $\|y-v\|<\varepsilon/4$ • وبما أن العلاقة $v \in T(B_1)$ تقتضي المساواة $v = Tx_1$ ، حيث x_1 عنصر من B_1 ، فان

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

يترتب على هذا وعلى (7) بفرض $n=2$ ، أن $y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$ • وكما في السابق ، فاننا نستنتج أن ثمة عنصرا x_2 في B_2 بحيث أن

$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

لذا فان $y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$ ، وهكذا • وفي الخطوة ذي الترتيب n ؛ يمكننا اختيار عنصر x_n من B_n بحيث يكون

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{8}$$

ليكن $z_n = x_1 + \cdots + x_n$ • بما أن $x_k \in B_k$ ، فان $\|x_k\| < 1/2^k$ • وينتج مــن هــذا بفــرض $n > m$ أن

$$\|z_n - z_m\| \leqq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$$

عندما $m \longrightarrow \infty$ • لذا فان (z_n) هي متتالية كوشي ، وبالتالي ، ولما كان X تاما ، فان هذه المتتالية متقاربة ؛ ولنفترض مثلا أن $z_n \longrightarrow x$ • كذلك ، فــان $x \in B_0$ لأن نصف قطر B_0 هو 1 وأن

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{9}$$

وبما أن T مستمر ، فان $Tz_n \longrightarrow Tx$ ، ويبين (8) عندئذ أن $Tx = y$ • لذا فان $y \in T(B_0)$ • ∎

اثبات المبرهنة ٤ـ١٢ـ٢

سنبرهن بأنه اذا كانت A أي مجموعة مفتوحة في X ، فان صورتها $T(A)$ مفتوحة في Y • سنفعل هذا باثبات أنه أيا كان العنصر $y = Tx \in T(A)$ ، فان المجموعة $T(A)$ تحوي كرة مفتوحة حول $y = Tx$ •

ليكن $y = Tx \in T(A)$ • لما كانت A مفتوحة ، فهي تحوي كرة مفتوحة مركزها x • لذا فان $A - x$ تحوي كرة مفتوحة مركزها 0 ، ليكن r نصف قطر الكرة ، ولنضع $k = 1/r$ ، الامر الذي يعني أن $r = 1/k$ • عندئذ تحوي $k(A - x)$ الكرة المفتوحة الواحدية $B(0; 1)$ • تقتضي التمهيدية ٤ـ١٢ـ٣ الآن أن المجموعة $T(k(A - x)) = k[T(A) - Tx]$ تحوي كرة مفتوحة حول 0 ، وكذلك تفعل المجموعة $T(A) - Tx$ • لذا فان $T(A)$ تحوي كرة مفتوحة حول $Tx = y$ • وبما أن العنصر y من $T(A)$ كان اختياريا فان $T(A)$ مفتوحة •

وأخيرا ، فاذا كان $T^{-1}: Y \longrightarrow X$ موجودا ، فانه مستمر اعتمادا على المبرهنة ١ـ٣ـ٤ لان T مفتوح • وبما أن T^{-1} خطي استنادا الى المبرهنة ٢ـ٦ـ١٠ فانه محدود بناء على المبرهنة ٢ـ٧ـ٩ • ∎

مسائل

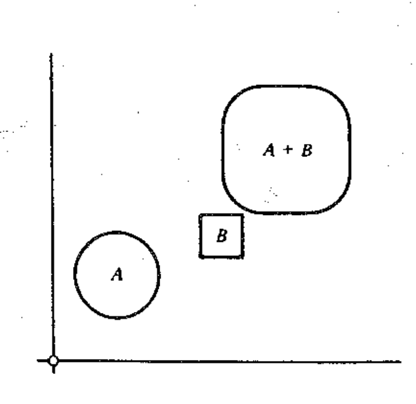
١ ـ بين بأن $T: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ المعرف بالقاعدة $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_1)$ مفتوح • هل التطبيق $\mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}^2$ المحدد بالقاعدة $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto (\xi_1, 0)$ تطبيق مفتوح ؟

٢ ـ بين بأن صور المجموعات المغلقة وفق تطبيق مفتوح ليست بالضرورة مجموعات مغلقة •

٣ ــ اذا وسعنا (1) و (2) ، فيمكن تعريف

$$A+B=\{x\in X \mid x=a+b, a\in A, b\in B\},$$

حيث A و B مجموعتان جزئيتان من X • وكي يصبح هــذا الرمز مألوفا لديك جد αA و $A+w$ و $A+A$ ، بفــرض أن $A=\{1,2,3,4\}$ • اشــرح الشــكل ٥٠ •



الشكل (٥٠) • المجموعات A و B و $A+B$ في المستوي

٤ ــ بين بأن المتباينة الواردة في (9) تامة (أي أنه لايمكن أن نضع عوضا عن < الرمز $\leqq$) •

٥ ــ ليكن X فضاء منظما نقاطه متتاليات من الاعداد العقدية $x=(\xi_j)$ بحيــث تكون حدود كل متتالية أصفارا باستثناء عدد منته من هذه الحدود ، وحيث النظيم معرف بالمساواة $\|x\|=\sup_j|\xi_j|$ • ليكن $T\colon X\longrightarrow X$ معرفا كما يلي :

$$y=Tx=\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \cdots\right).$$

أثبت أن T خطي ومحدود ، في حين أن T^{-1} ليس محدودا • هل هــذا يناقض ٤ــ١٢ــ٢ ؟

٦ ــ ليكن X و Y فضاءي باناخ ، وليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا متباينا وغامرا • بين أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T^{-1}: \mathscr{R}(T) \longrightarrow X$ محدودا هو أن يكون $\mathscr{R}(T)$ مغلقا في Y •

٧ ــ ليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث X و Y فضاءا باناخ • فاذا كان T متباينا وغامرا ، فأثبت وجود عددين حقيقيين موجبين a و b بحيث أن $a\|x\| \leqq \|Tx\| \leqq b\|x\|$ أيا كان x من X •

٨ ــ (**النظائم المتكافئة**) • ليكن $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمين على فضاء متجهي X بحيث يكون الفضاءان $X_1=(X,\|\cdot\|_1)$ و $X_2=(X,\|\cdot\|_2)$ تامين • فاذا اقتضى $\|x_n\|_1 \longrightarrow 0$ دوما أن $\|x_n\|_2 \longrightarrow 0$ ، فبين أن التقارب في X_1 يقتضي التقارب في X_2 ، وبالعكس • بين وجود عددين موجبين a و b بحيث أنه أيا كان x من X فان

$$a\|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq b\|x\|_1.$$

(لاحظ أن هذين النظيمين متكافئان ، راجع التعريف ٢ــ٤ــ٤) •

٩ ــ ليكن $X_1=(X,\|\cdot\|_1)$ و $X_2=(X,\|\cdot\|_2)$ فضاءي باناخ • فاذا وجد ثابت c بحيث أن $\|x\|_1 \leqq c\|x\|_2$ أيا كان x من X ، فبين وجود ثابت k بحيث أن $\|x\|_2 \leqq k\|x\|_1$ أيا كان x من X (وبالتالي فان النظيمين متكافئان ، راجع التعريف ٢ــ٤ــ٤) •

١٠ــ نعلم من البند ١ــ٣ أن المجموعة $\mathscr{T}$ الحاوية المجموعات الجزئية المفتوحة في فضاء متري X تسمى **طبولوجيا** على X • وبالتالي فكل نظيم على فضاء متجهي X يعين **طبولوجيا على** X • فاذا كان لدينا نظيمان على X بحيث يكون $X_1=(X,\|\cdot\|_1)$ و $X_2=(X,\|\cdot\|_2)$ فضاءي باناخ ، وكانت الطبولوجيا $\mathscr{T}_1$ المعرفة بـ $\|\cdot\|_1$ تحوي الطبولوجيا $\mathscr{T}_2$ المعرفة بـ $\|\cdot\|_2$ ، فبين أن $\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$ •

٤ــ١٣ المؤثرات الخطية المغلقة
مبرهنة البيان المغلق

ليست كل المؤثرات الخطية الهامة من الوجهة التطبيقية محدودة • وعلى سبيل المثال ، فان المؤثر التفاضلي في ٢ــ٧ــ٥ غير محدود ، كما أننا كثيرا ما تتعامل في ميكانيكا الكم وفي تطبيقات أخرى مع مؤثرات غير محدودة • هذا ، وان كل المؤثرات الخطية التي يمكن للباحثين التحليليين استعمالها في الواقع هي تلك المسماة بالمؤثرات الخطية المغلقة • وسنعرف في هذا البند المؤثرات الخطية المغلقة على الفضاءات المنظمة ، وندرس بعضا من سماتها ، وبخاصة ما يتعلق بمبرهنة البيان المغلق الهامة ، والتي تبحث في الشروط الكافية التي لو تحققت لغدا المؤثر الخطي المغلق على فضاء باناخ محدودا •

هذا وسنورد في الفصل العاشر دراسة أكثر تفصيلا للمؤثرات المغلقة ومؤثرات أخرى غير محدودة في فضاء هلبرت ، كما سنورد في الفصل الحادي عشر تطبيقات لهذه المؤثرات في ميكانيكا الكم •

لنبتدىء بالتعريف التالي •

٤ــ١٣ــ١ تعريف (المؤثر الخطي المغلق)

ليكن X و Y فضاءين منظمين وليكن $T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا ساحته $\mathscr{D}(T)$ مجموعة جزئية من X • عندئذ يسمى T **مؤثرا خطيا مغلقا** اذا كان **بيانه**

$$\mathscr{G}(T) = \{(x, y) \mid x \in \mathscr{D}(T),\ y = Tx\}$$

مغلقا في الفضاء المنظم $X \times Y$ ، حيث تعرف العمليتان الجبريتان للفضاء المتجهي في $X \times Y$ بالطريقة المألوفة ، أي أن

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x,\ \alpha y)$$

(α عدد) ، وحيث يعرف النظيم على $X \times Y$ بالمساواة*

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|. \tag{1}$$

ما هي الشروط التي لو تحققت لكان المؤثر الخطي المغلق محدودا ؟ ان الاجابة عن هذا السؤال تقدمه المبرهنة الهامة التالية •

٤-١٣-٢ مبرهنة البيان المغلق

ليكن X و Y فضاءي باناخ ، وليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ جزء من X • عندئذ اذا كانت $\mathfrak{D}(T)$ مغلقة في X ، فان المؤثر T يكون محـــدودا •

البرهـــان :

سنبين أولا أن المجموعة $X \times Y$ المزودة بالنظيم (1) تشكل فضاء تامـــا • لتكن (z_n) متتالية كوشي في $X \times Y$ ، حيث $z_n = (x_n, y_n)$ • عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح N بحيث يكون

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon \qquad (m, n > N). \tag{2}$$

لذا فان كلا من (x_n) و (y_n) متتالية لكوشي في X و Y تباعا ، كما أن هاتـــين المتتاليتين متقاربتان ، وليكن مثـــلا $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$ ، لان X و Y تامان • وهذا يقتضي أن يكون $z_n \longrightarrow z = (x, y)$ ، ذلك أنه يترتب علـــى (2) عندمـــا $m \longrightarrow \infty$ أن $\|z_n - z\| \leqq \varepsilon$ حيث $n > N$ • وبما أن متتالية كوشي (z_n) كانت اختيارية ، فان $X \times Y$ تام •

ان البيان $\mathscr{G}(T)$ مغلق في $X \times Y$ فرضا و $\mathfrak{D}(T)$ مغلقة في X ، لذا فـــان $\mathscr{G}(T)$ و $\mathfrak{D}(T)$ تامان وفق ١-٤-٧ • لنأخذ الآن التطبيق

$$P: \mathscr{G}(T) \longrightarrow \mathfrak{D}(T)$$

$$(x, Tx) \longmapsto x.$$

---

* لمزيد من النظائم ، انظر الى المسألة ٢ .

ان P خطي • كذلك فان P محدود لان

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leqq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|.$$

ان P متباين وغامر أيضا ؛ وفعلا فان التطبيق العكسي هو

$$P^{-1}: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathcal{G}(T)$$

$$x \longmapsto (x, Tx).$$

بما أن $\mathcal{G}(T)$ و $\mathfrak{D}(T)$ تامان ، فيمكننا تطبيق مبرهنة العكس المحدود ٤ــ١٢ــ٢ • ونجد أن P^{-1} محدود ، ولنكتب مثلا أن $\|(x, Tx)\| \leqq b\|x\|$ ، حيث b عدد ما و x أي عنصر من $\mathfrak{D}(T)$ • لذا فان T محدود لان

$$\|Tx\| \leqq \|Tx\| + \|x\| = \|(x, Tx)\| \leqq b\|x\|$$

أيا كان x من $\mathfrak{D}(T)$ • ∎

وبالتعريف ، فان الشرط اللازم والكافي كي يكون $\mathcal{G}(T)$ مغلقا هــو أن تقتضي العلاقة $z = (x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ أن يكون $z \in \mathcal{G}(T)$ • نستنتج من الشق (آ) من المبرهنة ١ــ٤ــ٦ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $z \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ هو أن توجــد $z_n = (x_n, Tx_n) \in \mathcal{G}(T)$ بحيث أن $z_n \longrightarrow z$ ، وبالتالي يكون

$$x_n \longrightarrow x, \qquad Tx_n \longrightarrow y; \tag{3}$$

ويكون الشرط اللازم والكافي كي تتحقق العلاقة $z = (x, y) \in \mathcal{G}(T)$ هو أن يكون $x \in \mathfrak{D}(T)$ و $y = Tx$ • وهذا يثبت المعيار المفيد التالي الذي يعبر عــن خاصةٍ غالبا ما تؤخذ كتعريف لانغلاق مؤثر خطي •

٤ــ١٣ــ٣ مبرهنة (المؤثر الخطي المغلق)

ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا ، حيث $\mathfrak{D}(T) \subset X$ وحيث X و Y فضاءان منظمان • عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كــي يكون T مغلقا هــو أن تتحــقق

الخاصة التالية : اذا كان $x_n \longrightarrow x$ ، **حيث** $x_n \in \mathscr{D}(T)$ **وكان** $Tx_n \longrightarrow y$ ، **فان** $x \in \mathscr{D}(T)$ **و** $Tx = y$ •

لاحظ جيدا أن هذه الخاصة تختلف عن الخاصة التالية للمؤثر الخطي المحدود : اذا كان مؤثر خطي T محدودا ، وبالتالي مستمرا ، وكانت (x_n) متتالية في $\mathscr{D}(T)$ متقاربة في $\mathscr{D}(T)$ ، فان (Tx_n) تكون أيضا متقاربة ، راجع ١ـ٤ـ٨ • ليس من الضروري أن تكون هذه الخاصة صحيحة في حال مؤثر خطي مغلق ، الا أنه اذا كان T مغلقا وكانت متتاليتان (x_n) و $(\tilde{x}_n)$ في ساحة T متقاربتين ولهما نهاية واحدة ، واذا كانت المتتاليتان الموافقتان (Tx_n) و $(T\tilde{x}_n)$ متقاربتين كلاهما ، فان للمتتاليتين الاخيرتين نهاية واحدة • (راجع المسألة ٦) •

٤ـ١٣ـ٤ مثال (المؤثر التفاضلي)

ليكن $X = C[0, 1]$ ، وليكن

$$T: \mathscr{D}(T) \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto x'$$

حيث ترمز الفتحة الى عملية الاشتقاق ، وحيث $\mathscr{D}(T)$ هو الفضاء الجزئي المؤلف من الدوال x في X التي مشتقاتها مستمرة • عندئذ يكون T غير محدود . ولكنه مغلق •

البرهان :

نرى من ٢ـ٧ـ٥ أن T غير محدود • سنثبت أن T مغلق بتطبيق المبرهنة ٤ـ١٣ـ٣ • لتكن (x_n) متتالية في $\mathscr{D}(T)$ بحيث تكون المتتاليتان (x_n) و (Tx_n) متقاربتين ، وليكن مثلا

$$x_n \longrightarrow x \qquad \text{و} \qquad Tx_n = x_n' \longrightarrow y.$$

بما أن التقارب في نظيم $C[0, 1]$ هو تقارب منتظم على $[0, 1]$ ، فاننا نستنتج من $x_n' \longrightarrow y$ أن

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)\,d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(\tau)\,d\tau = x(t)-x(0),$$

أي أن

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau.$$

ويبين هذا أن $x \in \mathfrak{D}(T)$ وأن $x' = y$ • بعد هـذا تقتضي المبرهنة ٤ـ١٣ـ٣ أن T مغلـق • ∎

وتجدر الاشارة في هذا المثال الى أن $\mathfrak{D}(T)$ ليست مغلقة في X ، لانها لو كانت مغلقة ، لكان T محدودا بناء على مبرهنة البيان المغلق •

الانفلاق لا يقتضي محدودية مؤثر خطي . وبالعكس ، فان المحدودية لاتقتضي الانغـلاق •

البرهـان :

الدعوى الاولى موضحة بالمثال ٤ـ١٣ـ٤ • أما الدعوى الثانية ، فنوضحها بالمثال التالي : ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathfrak{D}(T) \subset X$ المؤثر المطابق على $\mathfrak{D}(T)$ ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ فضاء جزئي تماما وكثيف في فضاء منظم X • عندئذ فان كون T خطيـا ومحدودا أمر واضح للعيان • الا أن T ليس مغلقا ، وهذا ينتج مباشرة مـن المبرهنة ٤ـ١٣ـ٣ اذا أخذنا عنصرا x من $X - \mathfrak{D}(T)$ ومتتالية (x_n) في $\mathfrak{D}(T)$ تتقارب مـن x • ∎

ان مناقشتنا الحالية تشير الى أنه فيما يتعلق بالمؤثرات غير المحدودة ، فان تحديد الساحات ومسائل التمديد تلعب دورا أساسيا • وفعلا ، فان هذا صحيح . وسنراه بمزيد من التفصيل في الفصل العاشر • وتجدر بنا ملاحظة أن الدعوى التي أثبتناها توا سلبية في جوهرها ، أما في الجانب الايجابي ، فانه ترد التمهيدية التاليـة :

٤ـ١٣ـ٥ تمهيدية (المؤثر المغلق)

ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا محدودا ساحته $\mathfrak{D}(T)$ جزء من X ،حيث X و Y فضاءان منظمان . عندئذ نجد ما يلي :

(آ) اذا كانت $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X ، فان T مغلق .

(ب) اذا كان T مغلقا و Y تاما ، فان $\mathfrak{D}(T)$ مجموعة جزئية مغلقة في X .

البرهـان :

(آ) اذا كانت (x_n) متتالية في $\mathfrak{D}(T)$ ومتقاربة مـن x مثـلا ، وبحيث تكون المتتالية (Tx_n) متقاربة كذلك ، فـان $x \in \overline{\mathfrak{D}(T)} = \mathfrak{D}(T)$ ذلـك أن $\mathfrak{D}(T)$ مغلقة ، كما أن $Tx_n \longrightarrow Tx$ لكون T مستمرا . ان T هنا مغلق بناء على المبرهنة ٤ـ١٣ـ٣ .

(ب) يوجد لكل x مـن $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ متتالية (x_n) في $\mathfrak{D}(T)$ بحيث يكـون $x_n \longrightarrow x$ ، راجع ١ـ٤ـ٦ . وبما أن T محدود ، فان

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leqq \|T\| \, \|x_n - x_m\|.$$

وهذا يبين أن (Tx_n) هي متتالية كوشي . ولما كان Y تاما ، فـان (Tx_n) تتقارب وليكن مثلا $Tx_n \longrightarrow y \in Y$. وبما أن T مغلق ، فـان $x \in \mathfrak{D}(T)$ استنادا الـى ٤ـ١٣ـ٣ (كما أن $Tx = y$) . لذا فان $\mathfrak{D}(T)$ مغلقة لان النقطة x من $\overline{\mathfrak{D}(T)}$ اختياريـة . ∎

مســائل

١ ـ برهن بأن (1) تحدد نظيما على $X \times Y$.

٢ ـ ثمة نظائم أخرى تعرف على الجـداء $X \times Y$ للفضاءين المنظمين X و Y ، نذكـر منهـا

$$\|(x, y)\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$$

و

$$\|(x, y)\|_0 = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}.$$

تحقق من أن هاتين المساواتين تحددان نظيمين •

٣ ــ أثبت أن البيان $\mathscr{G}(T)$ لمؤثر خطي $T: X \longrightarrow Y$ هــو فضاء خطــي جزئي مــن $X \times Y$ •

٤ ــ اذا كان X و Y في التعريف ٤ــ١٣ــ١ فضاءي باناخ ، فبين أن الجــداء $V = X \times Y$ المزود بالنظيم المعرف في (1) هو فضاء باناخ •

٥ ــ **(العكس)** اذا كان العكس T^{-1} لمؤثر خطي مغلق موجودا ، فبين أن T^{-1} مؤثر خطي مغلق •

٦ ــ ليكن T مؤثرا خطيا مغلقا • فاذا كانت المتتاليتان (x_n) و $(\tilde{x}_n)$ في $\mathscr{D}(T)$ متقاربتين من نهاية واحدة x ، وكان كل من (Tx_n) و $(T\tilde{x}_n)$ متقاربة ؛ فبين أن للمتتاليتين (Tx_n) و $(T\tilde{x}_n)$ نهاية واحدة •

٧ ــ أثبت صحة الدعوى الثانية من المبرهنة ٤ــ١٢ــ٢ انطلاقا على مبرهنــة البيــان المغلــق •

٨ ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين ، وليكن $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقــا •
(آ) بين أن الصورة A لمجموعة جزئية متراصة C في X مغلقــة في Y •
(ب) بين بأن الصورة العكسية B لمجموعة جزئية متراصة K في Y مغلقة في X • (راجع التعريف ٢ــ٥ــ١) •

٩ ــ اذا كان $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا ، حيث X و Y فضاءان منظمان و Y متراص ، فبين أن T محدود •

١٠ــ ليكن X و Y فضاءين منظمين و X متراصا • فاذا كان $T: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا متباينا وغامرا ؛ فبين أن T^{-1} محدود •

١١ـ **(الفضاء الصفري)** بين بأن الفضاء الصفري $N(T)$ للمؤثر الخطي المغلق $T: X \longrightarrow Y$ هو فضاء جزئي مغلق في X •

١٢ـ ليكن X و Y فضاءين منظمين • فاذا كان $T_1: X \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا مغلقا و $T_2 \in B(X, Y)$ ، فبين أن $T_1 + T_2$ مؤثر خطي مغلق •

١٣ـ ليكن T مؤثرا خطيا مغلقا ساحته $\mathfrak{D}(T)$ جزء مـن فضاء باناخ X ومداه $\mathfrak{R}(T)$ جزء من فضاء منظم Y • فاذا كان T^{-1} موجودا ومحدودا ، فبين أن $\mathfrak{R}(T)$ مغلــق •

١٤ـ لنفترض أن حدود المتسلسلة $u_1 + u_2 + \cdots$ دوال مشتقاتها مستمرة على الفترة $J = [0, 1]$ ، وان المتسلسلة متقاربة بانتظام على J ومجموعها x • لنفترض أيضا أن $u_1' + u_2' + \cdots$ تتقارب بانتظام أيضا على J • برهن عندئذ أن للدالة x مشتقا مستمرا على $(0, 1)$ ، وأن $x' = u_1' + u_2' + \cdots$ •

١٥ـ **(التمديد المغلق)** ليكن $T: \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ مؤثرا خطيا بيانه $\mathscr{G}(T)$ ، حيث $\mathfrak{D}(T)$ جزء من X، وحيث X و Y فضاءا باناخ • بين بأن الشرط اللازم والكافي كي يوجد لـ T ممدد $\tilde{T}$ ، حيث $\tilde{T}$ مؤثر خطي مغلق بيانه $\overline{\mathscr{G}(T)}$ ، هو أن لا يحوي $\overline{\mathscr{G}(T)}$ عنصرا من الشكل $(0, y)$ ، حيث $y \neq 0$ •

الفصل الخامس

مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

لاستيعاب مضمون هذا الفصل يكفي قراءة الفصل الاول (دون الفصلين الثاني والرابع) ، وبالتالي فمن الممكن دراسة الفصل الحالي بعد الفصل الاول مباشرة ان شاء القارىء •

ان أهمية مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ تكمن في أنها تشكل مصدرا لمبرهنات الوجود والوحدانية في العديد من فروع التحليل • وبهذا المعنى ، فان هذه المبرهنة توضح الى حد بعيد القوة الموحدة لاساليب التحليل الدالي والفائدة المترتبة على مبرهنات النقطة الثابتة في التحليل •

توجيه مختصر حول المضمون الرئيسي

ان **مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ** او **مبرهنة التقليص** ٥ـ١ـ٢ تتعلق بتطبيقات معينة (تسمى تقليصات ، راجع ٥ـ١ـ١) لفضاء متري تام في نفسه • وهي تورد الشروط الكافية لوجود ووحدانية **نقطة ثابتة** (وهي النقطة التي تكون صورتها وفق التطبيق هي النقطة نفسها) • وتمدنا هذه المبرهنة كذلك بطريقة تكريرية يمكننا بواسطتها الحصول على تقريبات للنقطة الثابتة وعلى

حدود الخطأ (راجع ٥ـ١ـ٣) • وسنتناول في هذا الفصل ثلاثة حقول هامة لتطبيق هذه المبرهنة ، ألا وهي :

المعادلات الجبرية الخطية (البند ٥ـ٢) ،
والمعادلات التفاضلية العادية (البند ٥ـ٣) ؛
والمعادلات التكاملية (البند ٥ـ٤) •

وثمة تطبيقات أخرى (في المعادلات التفاضلية الجزئية مثلا) والتي نحتاج لدراستها متطلبات أخرى •

٥ـ١ مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ

النقطة الثابتة لتطبيق $T: X \longrightarrow X$ لمجموعة X في نفسها هي نقطة x من X تكون صورتها وفق التطبيق النقطة x ذاتها (بمعنى أن x « تبقى ثابتة » وفق T) ، أي أن

$$Tx = x,$$

الامر الذي يعني بأن الصورة Tx تتطابق والعنصر x •

وعلى سبيل المثال ، فلا يوجد للانسحاب نقاط ثابتة ، أما دوران المستوى فله نقطة ثابتة وحيدة (هي مركز الدوران) ، وأما التطبيق $x \longmapsto x^2$ للمجموعة $\mathbf{R}$ في نفسها فله نقطتان ثابتتان (0 و 1) ، وأما الاسقاط $(\xi_1, \xi_2) \longmapsto \xi_1$ لـ $\mathbf{R}^2$ على المحور ξ_1 فله عدد غير منته من النقاط الثابتة (هي نقاط المحور ξ_1 جميعا) •

ان مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ ، والتي سندرجها بعد قليل ، هي مبرهنة حول وجود ووحدانية نقاط ثابتة لتطبيقات معينة ، وهي ، فضلا عن ذلك . تمدنا بالاجراءات اللازمة للحصول على تقريبات أفضل للنقطة الثابتة (أي حل المسألة العملية) • يدعى هذا الاجراء **تكريرا** ويعرف بأنه الطريقة التي تتم بأن نختار عنصرا كيفيا x_0 في مجموعة معطاة ، ونحسب بالتدريج متتالية $x_0, x_1, x_2, \cdots$ من علاقة بالشكل

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

أي أننا نختار عنصرا كيفيا x_0 ، ونعين على التوالي العناصر $x_1 = Tx_0$ ، $x_2 = Tx_1$ و ..... .

ان الاجراءات التكريرية تستعمل في كل فرع تقريبا من فروع الرياضيات التطبيقية ، كما أن براهين التقارب وتقديرات الخطأ تتم على الاغلب باستعمال مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (أو مبرهنات أعقد في النقطة الثابتة) . وتعطي مبرهنة باناخ الشروط الكافية لوجود (ووحدانية) نقطة ثابتة لصف من التطبيقات تسمى تقليصات ، نعرفها على النحو التالي .

٥ـ١ـ١ تعريف (التقليص)

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متريا . يدعى التطبيق $T: X \longrightarrow X$ **تقليصا على** X اذا وجد عدد حقيقي موجب α وأصغر من 1 بحيث أنه اذا كان x, y عنصرين من X فان

$$d(Tx, Ty) \leqq \alpha d(x, y) \qquad (\alpha < 1). \tag{1}$$

ويعني هذا هندسيا أن لاي نقطتين x و y صورتين أقرب احداهما الى الاخرى من قرب النقطتين x و y من بعضهما ، وبعبارة أدق ، فان النسبة $d(Tx, Ty)/d(x, y)$ لا يمكن أن تتجاوز عددا ثابتا α أصغر من 1 .

٥ـ١ـ٢ مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ (مبرهنة التقليص)

ليكن $X = (X, d)$ فضاء متريا ، حيث $X \neq \varnothing$. فاذا كان X تاما وكان $T: X \longrightarrow X$ تقليصا على X ، فانه يوجد لـ T نقطة ثابتة واحدة بالضبط .

البرهان :

سننشىء متتالية (x_n) ونبين بأنها متتالية كوشي ، الامر الذي يعني أنها متقاربة نظرا لكون X فضاء تاما ؛ وبعدئذ نبرهن بأن نهايتها x نقطة ثابتة لـ T وأنه لا يوجد لـ T نقاط ثابتة أخرى . أما فكرة البرهان فهي كما يلي :

نختار أي عنصر x_0 من X ، ونعرف « المتتاليـــة التكريرية » (x_n) علـــى النحو التالي :

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \quad \cdots, \quad x_n = T^n x_0, \quad \cdots. \tag{2}$$

من الواضح أن هذه هي متتالية صور x_0 وفق الاستعمال المتكرر لـ T • سنبين أن (x_n) هي متتالية كوشي • لدينا استنادا الى (1) و (2) التالي

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leqq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leqq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ \cdots &\leqq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{3}$$

وبالتالي فاننا نجد استنادا الى متباينة المثلث والى الدستور الذي يعطي مجموع الحدود الاولى من متسلسلة هندسية أنه اذا كان $n > m$ فان

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

وبما أن $0<\alpha<1$ ، فاننا نجد في البسط أن $1-\alpha^{n-m}<1$ ، ويكون بالتالي

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \qquad (n > m). \tag{4}$$

ولما كان $0<\alpha<1$ وكان $d(x_0, x_1)$ عددا ثابتا ، فمن الممكن جعل الطرف الايمن من المتباينة السابقة صغيرا بقدر ما نشاء لدى أخذ m كبيرا بقدر كاف (وأخـــذ $n > m$) • وبالتالي فان (x_m) هي متتالية كوشي • وبما أن X تام ، فـــان (x_m) متقاربة ؛ وليكن مثلا $x_m \longrightarrow x$ • سنبين الآن أن هذه النهاية x هي نقطة ثابتة للتطبيق T •

يترتب على متباينة المثلث وعلى (1) أن

$$d(x, Tx) \leqq d(x, x_m) + d(x_m, Tx)$$
$$\leqq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)$$

وبما أنه يمكن جعل المجموع الوارد في السطر الثاني أصغر من أي عدد موجب ε معطى سلفا ، لان $x_m \longrightarrow x$ ، فاننا نستنتج أن $d(x, Tx) = 0$ ، الامر الذي يترتب عليه أن $x = Tx$ استنادا الى (م٢) من البند ١ــ١ • لذا فان x نقطة ثابتة لـ T •

ان x هي النقطة الثابتة الوحيدة للتطبيق T ، ذلك أنه يترتب على $Tx = x$ و $T\tilde{x} = \tilde{x}$ استنادا الى (1) أن

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leqq \alpha d(x, \tilde{x})$$

وهذا يقتضي أن يكون $d(x, \tilde{x}) = 0$ نظرا لان $\alpha < 1$ • وبالتالي فان $x = \tilde{x}$ استنادا الى (م٢) ، وبذا يكتمل اثبات المبرهنة •■

٥ــ١ــ٣ نتيجة (التكرير ، حدا الخطا)

اذا روعيت شروط المبرهنة ٥ــ١ــ٢ فان المتتالية التكريرية (2) ، بفرض x_0 عنصرا اختياريا من X ، تتقارب من النقطة الثابتة الوحيدة x لـ T • أما تقديرا الخطا فهما التقدير السابق

$$d(x_m, x) \leqq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \tag{5}$$

والتقدير اللاحق •

$$d(x_m, x) \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m). \tag{6}$$

البرهــان :

ان الدعوى الاولى جلية من البرهان السابق ، ذلك أن المتباينة (5) تنتج من (4) بجعــل $n \longrightarrow \infty$ • لننتقل الآن الــى استنتاج (6) • اذا أخــذنا $m = 1$

واستعضنا عن y_0 بـ x_0 وعن y_1 بـ x_1 فاننا نجد انطلاقا من (5) أن

$$d(y_1, x) \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1).$$

فاذا وضعنا $y_0 = x_{m-1}$ ، فاننا نجد $y_1 = Ty_0 = x_m$ ونحصل على (6) • ∎

ان حد الخطأ السابق (5) يمكن أن يستعمل في بداية حساب تقدير عـدد الخطوات الضرورية للحصول على دقة معطاة • أمـا (6) فيمكن أن يستعمل في المراحل المتوسطة أو في نهاية الحساب ، ودقته تساوي على الاقل دقة (5) ، وقد تكون أفضل ، راجع المسألة ٨ •

ان هذا الوضع من وجهة نظر الرياضيات التطبيقية لا يزال غير مرض تماما ، ذلك أنه كثيرا ما يحدث أن يكون التطبيق T تقليصا ليس على الفضاء X بأكمله ، وانما على مجموعة جزئية Y من X • بيد أنه اذا كانت Y مغلقة ، فهي تامة (وفق المبرهنة ١ــ٤ــ٧) وبالتالي يوجد لـ T نقطة ثابتـة x في Y ، كما أن $x_m \longrightarrow x$ كما في السابق ، شريطة فرض قيد مناسب على اختيار x_0 بحيث تبقى الحدود x_m في Y • ونورد في هذا الصدد نتيجة نموذجية ومفيدة من الوجهة العملية على النحو التالي •

٥ــ١ــ٤ مبرهنة (التقليص على كرة)

ليكن T تطبيقا لفضاء متري تام $X = (X, d)$ في نفسه ، لنفترض ان T تقليص على كرة مغلقة $Y = \{x \mid d(x, x_0) \leqq r\}$ ، اي ان T يحقق (1) أيا كان x و y من Y • لنفترض فضلا عن ذلك ان

$$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r. \qquad (7)$$

عندئذ تتقارب المتتالية التكريرية (2) من نقطة x في Y. ان x هذه هي نقطة ثابتـة لـ T ، كما انها النقطة الثابتة الوحيدة لـ T في Y •

البرهـان :

علينا فقط اثبات أن كل الحدود x_m والنقطة كذلك تقع في Y • اذا وضعنا

$m=0$ في (4) وغيرنا n الى m واستعملنا (7) ، فاننا نجد أن

$$d(x_0, x_m) \leqq \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < r.$$

لذا فان كل الحدود x_m واقعة في Y •كذلك فان $x \in Y$ ذلك أن $x_m \to x$ وأن Y مغلقة • وهكذا فان صحة المبرهنة تترتب الآن من برهان مبرهنة باناخ ٥ــ١ــ٢ •∎

ويمكن للقارىء ايراد برهــان بسيط للتمهيدية التالية التي سنستعملها في أبحاثنا القادمة •

٥ــ١ــ٥ تمهيدية (الاستمرار)

ان التقليص T على فضاء متري X هو تطبيق مستمر

مســائل

١ ــ أعط أمثلة أخرى على تطبيقات في الهندسة الابتدائية لها (آ) نقطة ثابتــة وحيدة ، (ب) عدد غير منته من النقاط الثابتة •

٢ ــ ليكن $X=\{x \in \mathbf{R} \mid x \geqq 1\} \subset \mathbf{R}$ ، وليكن $T: X \longrightarrow X$ تطبيقا معــرفا بالمساواة $Tx = x/2 + x^{-1}$ • بين أن T تقليص ، وأوجد أصغر قيمة ممكنة لـ α •

٣ ــ بين بايراد مثال أن التمام في المبرهنة ٥ــ١ــ٢ شرط ضروري ولا يمكن حذفــه •

٤ ــ من المهم في مبرهنة باناخ ٥ــ١ــ٢ أن الشرط (1) لا يمكن الاستعاضة عنه بالمتباينة $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ عندما يكون $x \neq y$ • وللتأكد من هذا الامــر نأخذ المجموعة $X=\{x \mid 1 \leqq x < +\infty\}$ المزودة بمقصور المترك المألوف على المحور الحقيقي ، والتطبيق $T: X \longrightarrow X$ المعرف بالشكل $x \longmapsto x + x^{-1}$ • بين أن $|Tx - Ty| < |x - y|$ عندما يكون $x \neq y$ ، في حين أنه لا يوجد للتطبيق نقاط ثابتــة •

٥ ــ اذا حقق التطبيق $T: X \longrightarrow X$ الشرط $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ عندما يكون $x \neq y$ ، وكان لـ T نقطة ثابتة ، فبين أن النقطة الثابتة وحيدة • ان (X, d) هنا هو فضاء متري •

٦ ــ اذا كان T تقليصا ، فبين أن T^n (حيث $n \in \mathbf{N}$) تقليص • أثبت أنه اذا كان T^n تقليصا (حيث $n > 1$) ، فليس من الضروري أن يكون T تقليصا •

٧ ــ أثبت صحة التمهيدية ٥ــ١ــ٥ •

٨ ــ بين بأن حدود الخطأ المعطاة بـ (5) تشكل متتالية رتيبة متناقصة تماما • أثبت أن جودة (6) هي على الاقل مثل جودة (5) •

٩ ــ بين أنه في حالة المبرهنة ٥ــ١ــ٤ ، فاننا نجد تقدير الخطأ السابق $d(x_m, x) < \alpha^m r$ وتقدير الخطأ اللاحق (6) •

١٠ــ هنالك شرط كاف مألوف في التحليل لتقارب تكرير $x_n = g(x_{n-1})$ هو أن يكون لـ g مشتق مستمر وأن يكون

$$|g'(x)| \leqq \alpha < 1.$$

تحقق من هذا الامر باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ •

١١ــ للحصول على حلول عددية تقريبية لمعادلة معطاة $f(x) = 0$ ، يمكن تحويل المعادلة الى الشكل $x = g(x)$ ، واختيار قيمة ابتدائية x_0 وحساب

$$x_n = g(x_{n-1}) \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

لنفترض أنه يوجد لـ g مشتق مستمر على فترة ما $J = [x_0 - r, x_0 + r]$ ، وأنه يحقق الشرط $|g'(x)| \leqq \alpha < 1$ على J وكذلك الشرط

$$|g(x_0) - x_0| < (1 - \alpha) r.$$

بين عندئذ أنه يوجد للمعادلة $x = g(x)$ حل وحيد x على J ، وأن المتتالية التكريرية (x_m) تتقارب من هذا الحل ، وأننا نجد تقديري الخطأ التاليين

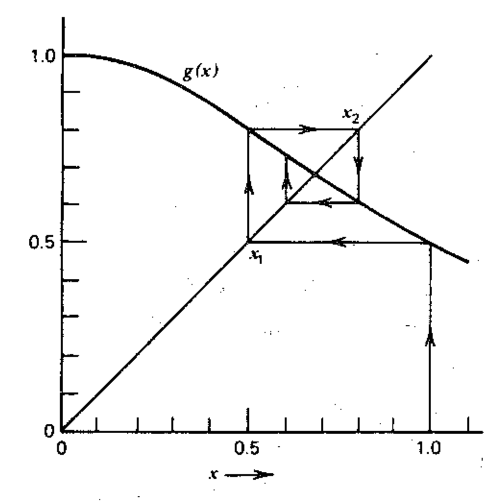
$$|x - x_m| < \alpha^m r, \qquad |x - x_m| \leqq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_m - x_{m-1}|.$$

١٢ـ أنشىء طريقة تكريرية لحل المعادلة $f(x)=0$ بالافادة من مبرهنة باناخ ٥ـ١ـ٢ اذا وجد مشتق مستمر لـ f على الفترة $J=[a,b]$ ، وكان $f(a)<0$ و $f(b)>0$ و $0<k_1\leqq f'(x)\leqq k_2 \quad (x\in J)$ • استعمل $g(x)=x-\lambda f(x)$ بقيمة مناسبة لـ λ •

١٣ـ سنورد طريقة تكريرية في حل $f(x)=x^3+x-1=0$ على النحو التالي :
(آ) بين أن احد الامكانات هو

$$x_n=g(x_{n-1})=(1+x_{n-1}^2)^{-1}.$$

اختر $x_0=1$ وانجز ثلاث خطوات • هل $|g'(x)|<1$ ؟ (راجع المسألة ١٠) • بين أنه يمكن شرح التكرير بالشكل ٥١ • (ب) قدر الاخطاء باستعمال (5) • (جـ) يمكن كتابة $f(x)=0$ بالشكل $x=1-x^3$ • هل هذه الصيغة مناسبة للتكرير ؟ جرب $x_0=1$ و $x_0=0.5$ و $x_0=2$ ، وانظر فيما يحدث •



الشكل (٥١) • التكرير في الشق(آ) من المسألة ١٣

١٤ـ بين أن ثمة طريقة تكرير أخرى للمعادلة الواردة في المسألة ١٣ هي

$$x_n=x_{n-1}^{1/2}(1+x_{n-1}^2)^{-1/2}.$$

اختر $x_0 = 1$ • عين x_1 و x_2 و x_3 • ما هو سبب التقارب السريع ؟ (الجذر الحقيقي هو 0.682 328 مقربا الى ستة أرقام عشرية) •

١٥ــ **(طريقة نيوتن)** لتكن f دالـة حقيقية مشتقاها الاول والثاني مستمران على الفترة $[a, b]$ ، وليكن $\hat{x}$ صفرا بسيطا لـ f في $(a. b)$ • بين بـأن طريقة نيوتن المعرفة كالتالي

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

هي تقليص في جوار ما للنقطة $\hat{x}$ (بحيث تتقارب المتتالية التكريرية من $\hat{x}$ أيا كانت x_0 القريبة بقدر كاف من $\hat{x}$) •

١٦ــ **(الجذر التربيعي)** • أثبت أن

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

هو تكرير لحساب الجذر التربيعي لعدد موجب معطى c ، حيث $n = 0, 1, \cdots$ • ما هو الشرط الذي نجده من المسألة ١٠ ؟ واذا انطلقنا من $x_0 = 1$ ، فاحسب التقريبات $x_1, \cdots, x_4$ لـ $\sqrt{2}$ •

١٧ــ ليكن $T: X \longrightarrow X$ تقليصا على فضاء متري تام ، بحيث تتحقق المتباينة (1) • وبسبب أخطاء التدوير وأسباب أخرى ، فاننا غالبا ما نأخذ بـدلا مـن T تطبيقا $S: X \longrightarrow X$ بحيث تتحقق المتباينة

$$d(Tx, Sx) \leqq \eta \quad (\text{عدد مناسب } \eta > 0)$$

أيا كان x من X •أثبت باستعمال طريقة الاستقراء الرياضي أنه عندئذ يكون أيا كان x من X :

$$d(T^m x, S^m x) \leqq \eta \frac{1 - \alpha^m}{1 - \alpha} \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

١٨ــ قد لا يوجد للتطبيق S الوارد في المسألة ١٧ نقطة ثابتة • ولكن قد يحدث

غالبا أن توجد نقطة ثابتة y لـ S^n من أجل عدد ما n • بين بالافادة من المسألة ١٧
أن المسافة بين y والنقطة الثابتة x تكون عندئذ هي

$$d(x, y) \leqq \frac{\eta}{1-\alpha}.$$

١٩ـ لنفترض في المسألة ١٧ أن $x = Tx$ و $y_m = S^m y_0$ • بين باستعمال (5) والمسألة ١٧ أن

$$d(x, y_m) \leqq \frac{1}{1-\alpha}[\eta + \alpha^m d(y_0, Sy_0)].$$

ما هي أهمية هذا الدستور في التطبيقات ؟

٢٠ـ (**شرط ليبشتز**) تقول عن تطبيق $T: [a, b] \longrightarrow [a, b]$ انه يحقق **شرط ليبشتز بثابت ليبشتز** k على $[a, b]$ اذا وجد عدد ثابت k بحيث يتحقق الشرط

$$|Tx - Ty| \leqq k\, |x - y|.$$

أيا كان x و y من $[a, b]$ • (آ) هل T تقليص ؟ (ب) اذا وجد لـ T مشتق مستمر على $[a, b]$ ، فبين أن T يحقق شرط ليبشتز • (جـ) هل عكس (ب) صحيح ؟

٥ـ٢ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات الخطية

لمبرهنة النقطة الثابتة لباناخ تطبيقات هامة في طرق التكرير المتعلقة بحل جمل المعادلات الجبرية الخطية ، وهي تقدم شروطا كافية لتقارب حدود الخطأ •

ولفهم الموضوع ، نعيد أولا الى الذاكرة أن ثمة **طرقا مباشرة** عدة لحل مثل هذه الجملة (وهذه الطرق تعطي الحل التام بعد القيام بعدد منته من العمليات

الحسابية اذا كانت الدقة ــ طول الكلمة في الآلة الحاسبة ــ غير محدودة) ، ومن الامثلة المألوفة طريقة الحذف لغوص (الطريقة النظامية التي تعلم في المدارس) . بيد أن التكرير ؛ أو **الطريقة غير المباشرة** ، قد يكون أكثر فعالية اذا كانت الجملة من نمط خاص ، كأن تكون **غير كثة** ، أي أنها تتألف من عدد كبير من المعادلات الا أن عدد معاملاتها غير الصفرية قليـــل . (ان مسائل الاهتزازات والشبكات وتقريبات الفضل للمعادلات التفاضلية الجزئية غالبا ما تقود الى جملة غير كثة) . وفضلا عن ذلك ، فان الطرق المباشرة المعتادة تتطلب قرابة $n^3/3$ مــن العمليات الحسابية (n =عدد المعادلات = عدد المجاهيل) ، وقد تصبح أخطاء التدوير كبيرة جدا عندما تأخذ n قيما كبيرة ، في حــين أنه في التكرير ؛ فــان الاخطاء الناشئة عن التدوير تتلاشى في نهاية المطاف . وفي الحقيقة ، فان طرق التكرير تستعمل غالبا لتحسين «الحلول» التي نجدها باستخدام الطرق المباشرة .

لتطبيق مبرهنة باناخ ، فاننا نحتاج الى فضاء متري تام وتطبيق تقليص عليه . لنأخذ المجموعة X لجميع المرتبات n من الاعداد الحقيقية التي نكتبها بالشكل

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),\qquad y=(\eta_1,\cdots,\eta_n),\qquad z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n),$$

وهكذا . لنعين على X متركا d معرفا بالمساواه

$$d(x,z)=\max_j|\xi_j-\zeta_j|. \tag{1}$$

ان $X=(X,d)$ تام ، وهذا أمر يمكن اثباتــه بصورة مماثلة لما فعلناه في المثــال ١ــ٥ــ١ .

سنعرف على X التطبيق $T\colon X\longrightarrow X$ بالدستور

$$y=Tx=Cx+b \tag{2}$$

حيث $C=(c_{jk})$ مصفوفة حقيقية مثبتة $n\times n$ ، وحيث b متجه مثبت في X . ان كل المتجهات هنا وحيثما وجدت في هذا البند هــي **متجهات عمودية** ، بسبب الاصطلاحات المألوفة في ضرب المصفوفات .

ما هي الشروط الواجب توفرها كي يكون T تقليصا ؟ اذا كتبنا (2) بدلالة المركبات ، فاننا نجد

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k + \beta_j \qquad j = 1, \cdots, n,$$

حيث $b = (\beta_j)$ • فاذا وضعنا $w = (\omega_j) = Tz$ ، فاننا نجد من (1) و (2) أن

$$d(y, w) = d(Tx, Tz) = \max_j |\eta_j - \omega_j|$$

$$= \max_j \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi_k - \zeta_k) \right|$$

$$\leqq \max_i |\xi_i - \zeta_i| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|$$

$$= d(x, z) \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|.$$

نرى بأنه يمكن كتابة هذا بالشكل $d(y, w) \leqq \alpha d(x, z)$ ، حيث

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|. \tag{3}$$

وهكذا فانه يترتب على مبرهنة باناخ ما يلي •

٥-٢-١ مبرهنة (المعادلات الخطية)

اذا كانت الجملة

$$x = Cx + b \qquad (C = (c_{jk}) \text{ معطى}) \tag{4}$$

المؤلفة من n من المعادلات الخطية في n من المجاهيل $\xi_1, \cdots, \xi_n$ (مركبات x) تحقق الشرط

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1 \qquad (j = 1, \cdots, n), \tag{5}$$

فلها حل واحد بالضبط x • يمكن الحصول على هذا الحل بايجاد نهاية المتتالية التكريرية $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots)$ ، حيث $x^{(0)}$ كيفي وحيث

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \qquad m = 0, 1, \cdots. \tag{6}$$

اما حدود الخطأ فهي [راجع (3)]

$$d(x^{(m)}, x) \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leqq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}). \tag{7}$$

ان (5) شرط كاف للتقارب ، وهو **معيار مجموع الاسطر** ذلك أنه يحوي مجاميع سطرية نجدها بجمع القيم المطلقة لعناصر سطر في C • واذا استعضنا عن (1) بمتارك أخرى ، فاننا نجد شروطا أخرى • ونورد في المسألتين ٧و٨ حالتين هامتين من الوجهة التطبيقية •

كيف تكون المبرهنة ٥ـ٢ـ١ مرتبطة بالطرق المستعملة في التطبيقات العملية ؟ ان الجملة المؤلفة من n من المعادلات والحاوية على n من المجاهيل تكتب عادة بالشكل

$$Ax = c, \tag{8}$$

حيث A مصفوفة مربعة عدد أسطرها n • والعديد من الطرق التكريرية في حل (8) حيث $\det A \neq 0$ تتم بأن نكتب $A = B - G$ حيث B مصفوفة غير شاذة مناسبة • عندئذ تغدو (8) بالشكل

$$Bx = Gx + c$$

وبالتالي نجد أن

$$x = B^{-1}(Gx + c).$$

وهذا يوحي بالتكرير (6) حيث

$$C = B^{-1}G, \qquad b = B^{-1}c. \tag{9}$$

لنوضح هذا بطريقتين معيارتين ، همـا طريقة جاكوبي في التكريـر ذات الاهمية النظرية البالغة ، وطريقة غوص ــ سيدل في التكرير المستعملة بصورة واسعة في الرياضيات التطبيقية •

٥ــ٢ــ٢ تكرير جاكوبي

تعرف طريقة التكرير هذه كما يلي :

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}\right) \qquad j = 1, \cdots, n, \tag{10}$$

حيث $c = (\gamma_j)$ في (8) ، ونفترض أن $a_{jj} \neq 0$ عندما $j = 1, \cdots, n.$ • ويقترح هذا التكرير بحل المعادلة ذات الترتيب j في (8) بالنسبة الى ξ_j • من السهل التحقق بأن (10) يمكن كتابتها بالشكل (6) حيث

$$C = -D^{-1}(A - D), \qquad b = D^{-1}c \tag{11}$$

بفرض أن $D = \mathrm{diag}\,(a_{jj})$ هي المصفوفة القطرية التي عناصرها غير الصفرية هـي عناصر القطر الرئيسي لـ A •

ان الشرط (5) المطبق على C في (11) كاف لتقارب تكرير جاكوبي • وبما أن C في (11) بسيطة نسبيا ، فانه يمكن التعبير عن (5) مباشرة بدلالة عناصـر A ، وتكون النتيجة هي معيار مجموع الاسطر لتكرير جاكوبي

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right| < 1 \qquad j = 1, \cdots, n, \tag{12}$$

أو

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}| \qquad j = 1, \cdots, n. \tag{12*}$$

ويمكن القول بأن هذا يبين أن التقارب يكون مضمونا اذا كانــت العناصر في القطر الرئيسي لـ A كبيرة بقدر كاف •

لاحظ بأنه في تكرير جاكوبي ، فقد تكون بعض المركبات لـ $x^{(m+1)}$ متوفرة في لحظة معينة ، الا أنها لا تستعمل أثناء تقدم عملية حساب المركبات الباقية ، أي ان جميع المركبات لتقريب جديد تقدم في آن واحد في نهاية الدورة التكريرية • ونعبر عن هذه الحقيقة بقولنا ان تكرير جاكوبي هو طريقة **للتصحيحات الآنية** •

٥-٢-٣ تكرير غوص ـ سيدل

ان هذه طريقة **للتصحيحات المتتابعة** ، التي تستعمل فيها كل المركبات المعروفة أخيرا في كل لحظة • وتعرف الطريقة كما يلي :

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}\right). \qquad (13)$$

حيث $j = 1, \cdots, n$ ، ونفترض ثانية أن $a_{jj} \neq 0$ أيا كان j •

ونحصل على مصفوفة من (13) بأن نكتب (الشكل ٥٢)

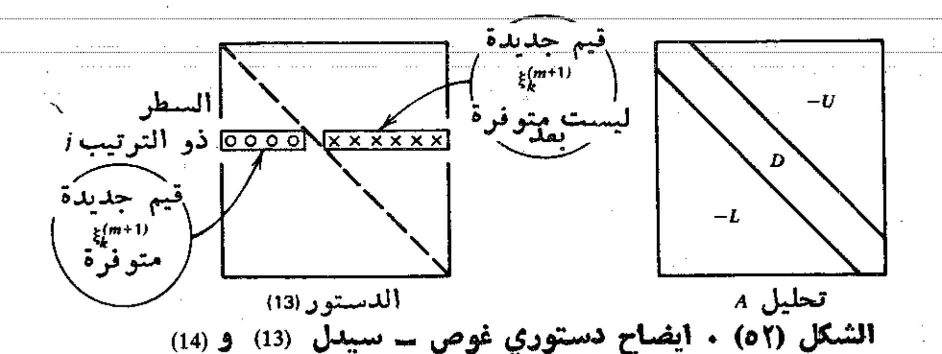
$$A = -L + D - U$$

حيث D هو كما عرفناه في تكرير جاكوبي ؛ وحيث L و U مصفوفتان مثلثتان سفلى وعليا على الترتيب ، عناصرهما في القطر الرئيسي أصفار جميعا ، واشارتا الناقص الواردتان أمر اصطلاحي ومتفق عليه • لنتخيل الآن أن كل معادلة في (13) ضربت بـ a_{jj} • عندئذ يمكننا كتابة الجملة الناتجة بالشكل

$$Dx^{(m+1)} = c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)}$$

أو

$$(D - L)x^{(m+1)} = c + Ux^{(m)}.$$



الشكل (٥٢) • ايضاح دستوري غوص ـ سيدل (13) و (14)

واذا ضربنا بـ $(D-L)^{-1}$ ، فاننا نجد (6) حيث

$$C=(D-L)^{-1}U, \qquad b=(D-L)^{-1}c. \tag{14}$$

ان الشرط (5) المطبق على C في (14) كاف لتقارب تكرير غوص-سيدل• ولما كانت C معقدة ، فان المسألة العملية الباقية تتلخص في ايجاد شروط أبسط كي تكون (5) صالحة • ونذكر دون برهان أن (12) كاف ، الا أن ثمة شروطا أفضل يمكن أن يجدها القارىء المهتم بهذا الموضوع في الصفحات 494 و 495 و 500 من كتاب :

Todd, J. (1962), *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill

مسـائل

١ ـ تحقق من صحة (11) و (14) •

٢ ـ لنأخذ الجملة

$$\begin{aligned} 5\xi_1 - \xi_2 &= 7 \\ -3\xi_1 + 10\xi_2 &= 24. \end{aligned}$$

(آ) حدد الحل التام • (ب) طبق تكرير جاكوبي • هل تحقق C الشرط (5) ؟

واذا انطلقنا من المتجه $x^{(0)}$ الذي مركبتاه 1, 1 ، فاحسب $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ وحدود الخطأ (7) لـ $x^{(2)}$ • قارن هذه الحدود بالخطأ الفعلي لـ $x^{(2)}$ • (ج) طبق تكرير غوص ـــ سيدل ، وذلك باجراء نفس الخطوات كما في (ب) •

٣ ـــ لنأخذ الجملة

$$\begin{aligned}
\xi_1 - 0.25\xi_2 - 0.25\xi_3 \qquad\qquad &= 0.50\\
-0.25\xi_1 + \quad \xi_2 \qquad\qquad - 0.25\xi_4 &= 0.50\\
-0.25\xi_1 \qquad\quad + \quad \xi_3 - 0.25\xi_4 &= 0.25\\
-0.25\xi_2 - 0.25\xi_3 + \quad \xi_4 &= 0.25.
\end{aligned}$$

(تنشأ المعادلات من هذا النمط في الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية) • (آ) طبق تكرير جاكوبي منطلقا من $x^{(0)}$ ذي المركبات 1, 1, 1, 1 باجراء ثلاث خطوات • قارن التقريبات بالقيم الحقيقية $\xi_1 = \xi_2 = 0.875$ و $\xi_3 = \xi_4 = 0.625$ • (ب) طبق تكرير غوص ـــ سيدل باجراء نفس ما فعلناه في (آ) •

٤ ـــ تنص **مبرهنة كيرشكورين** على أنه اذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $C = (c_{jk})$ ، فاننا نجد من أجل عدد ما j ، حيث $1 \leqq j \leqq n$ ، أن

$$|c_{jj} - \lambda| \leqq \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} |c_{jk}|.$$

(**القيمة الذاتية** لـ C هي عدد λ بحيث تتحقق المساواة $Cx = \lambda x$ من أجل عنصر ما غير صفري x) • (آ) بين أنه يمكن كتابة(4) بالشكل $Kx = b$ ،حيث $K = I - C$ وعندئذ تقتضي مبرهنة كيرشكورين و(5)معا أنه لا يمكن أن يوجد لـ K قيمة ذاتيه 0 (وبالتالي تكون K غير شاذة ،أي أن يكون $\det K \neq 0$ ويكون للمعادلة $Kx = b$ حل وحيد) • (ب) بين بأن (5) ومبرهنة كيرشكورين تقتضيان بأن يكون لـ C في (6) نصف قطر طيفي أصغر من 1 • (يمكن الاثبات بأن هذا لازم وكاف لتقارب التكرير • **ونصف القطر الطيفي** لـ C هو $\max_j |\lambda_j|$ ، حيث $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية لـ C) •

٥ ــ يبين المثال التالي جملة يتباعد من أجلها تكرير جاكوبي في حين يتقارب تكرير غوص ــ سيدل :

$$2\xi_1+\ \xi_2+\ \xi_3=4$$
$$\xi_1+2\xi_2+\ \xi_3=4$$
$$\xi_1+\ \xi_2+2\xi_3=4.$$

فاذا انطلقنا من $x^{(0)}=0$ ، تحقق من تباعد تكرير جاكوبي وانجز الخطوات القليلة الاولى في تكرير غوص ــ سيدل لتحصل على الانطباع بأن التكرير يبدو متقاربا من الحل التام $\xi_1=\xi_2=\xi_3=1$ •

٦ ــ من المقبول ظاهريا الظن بأن تكرير غوص ــ سيدل أفضل من تكرير جاكوبي في كل الاحوال • وواقع الامر ، فان الطريقتين غير قابلتين للمقارنة، وهذا أمر يدعو للدهشة • وعلى سبيل المثال ، ففي حالة الجملة

$$\xi_1\qquad+\ \xi_3=2$$
$$-\xi_1+\ \xi_2\qquad=0$$
$$\xi_1+2\xi_2-3\xi_3=0$$

يكون تكرير جاكوبي متقاربا ، في حين أن تكرير غوص ــ سيدل متباعد • استنتج هاتين الحقيقتين انطلاقا من الشروط اللازمة والكافية المنصوص عنها في الشق (ب) من المسألة ٤ •

٧ ــ **(معيار مجموع الاعمدة)** يقابل المترك في (1) الشرط (5) • فاذا زودنا X بالمترك d_1 المعرف بالمساواة

$$d_1(x,z)=\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\zeta_j|,$$

بين عندئذ أننا نجد عوضا عن (5) الشرط

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{jk}|<1 \qquad (k=1,\cdots,n). \tag{15}$$

٨ ــ (**معيار مجموع المربعات**) يقابـل المتـرك في (1) الشرط (5) . فـاذا زودنـا X بالمترك الاقليدي d_2، المعرف بالمساواة

$$d_2(x, z) = \left[\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \zeta_j)^2\right]^{1/2},$$

بين عندئذ أننا نجد عوضا عن (5) الشرط

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^2 < 1. \qquad (16)$$

٩ ــ (**تكرير جاكوبي**) بين أنه في حالة تكريـر جاكوبي ، فـان الشروط الكافية للتقارب (5) و (15) و (16) تأخذ الشكل

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} < 1, \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} < 1, \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{jk}^2}{a_{jj}^2} < 1.$$

١٠ــ أوجد المصفوفة C التي تحقق (5) دون أن تحقق (15) أو (16) .

٥ــ٣ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التفاضلية

ان أهم تطبيقات مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ ترد في سياق فضاءات الدوال ، وعندئذ تمدنا المبرهنة بمبرهنات في وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية ، كما سنرى في هذا البند .

سنأخذ فـي هـذا البنـد **معادلة تفاضلية عادية ظاهرة من المرتبة الاولى**

$$x' = f(t, x) \qquad (' = d/dt). \qquad \textbf{(1a)}$$

وتتألف **مسالة القيمة الابتدائية** لهذه المعادلة مـن المعادلة نفسها ومـن الشرط الابتـدائي

$$x(t_0) = x_0 \qquad \textbf{(1b)}$$

حيث t_0 و x_0 عددان حقيقيان معطيان •

سنستخدم مبرهنة باناخ لاثبات مبرهنة بيكار الشهيرة ، التي على الرغم من كونها ليست الاقوى بين المبرهنات المماثلة المعروفة ، الا أنها تلعب دورا حيويا في نظرية المعادلات التفاضلية العادية • وفكرة المعالجة جد بسيطة ، اذ أننا سنحول (1) الى معادلة تكاملية تعرف تطبيقا T ، وشروط المبرهنة ستقتضي أن يكون T تقليصا بحيث تغدو نقطته الثابتة هي الحل لمسألتنا •

٥ـ٣ـ١ مبرهنة بيكار في الوجود والوحدانية (المعادلات التفاضلية العادية)

لتكن f دالة مستمرة على المستطيل

$$R = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leqq a, |x - x_0| \leqq b\}$$

وبالتالي فان f محدودة على R ، ولنفترض مثلا ان

$$|f(t, x)| \leqq c \qquad \text{أيا كان } (t, x) \in R \tag{2}$$

لنفترض أن f تحقق شرط ليبشتز على R بالنسبة للمتغير الثاني x ، اي أنه يوجد عدد ثابت k (هو ثابت ليبشتز) بحيث أنه اذا كان (t, x) و (t, v) عنصرين من R فان

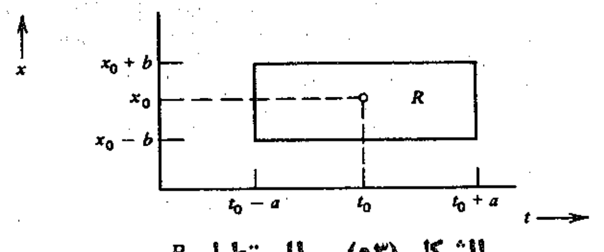
$$|f(t, x) - f(t, v)| \leqq k\,|x - v|. \tag{3}$$

عندئذ يكون لمسالة القيمة الابتدائية (1) حل وحيد • وهذا الحل موجود على الفترة $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ ، حيث*

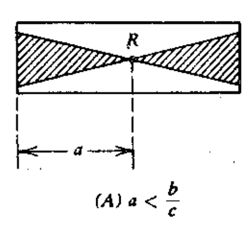
$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \tag{4}$$

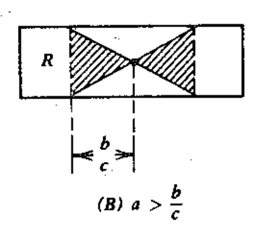
* في البرهان التقليدي يكون $\beta < \min\{a, b/c\}$ وهذا افضل . ويمكن الحصول على هذا أيضا بتعديل للبرهان الحالي (وذلك باستخدام مترك أعقد) ، راجع الكتاب التالي :

Bielicki, A. (1956), Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **4**, 261–268



الشكل (٥٣) • المستطيل R





الشكل (٥٤) • الايضاح الهندسي للمتباينة (2) عندما يكون c صغيرا نسبيا في (A) ، وكبيرا نسبيا في (B) • ويجب أن يبقى منحنى الحل في المنطقة المظللة المحدود بمستقيمين ميلاهما $\pm c$ •

البرهـــان :

ليكن $C(J)$ الفضاء المتري المؤلف من كل الدوال الحقيقية المستمرة على الفترة $J=[t_0-\beta, t_0+\beta]$ وحيث المترك d معرف بالمساواة

$$d(x, y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|.$$

إن $C(J)$ تام ، الامر الذي نعرفه من ١ـ١ـ٥ • ليكن $\bar{C}$ الفضاء الجزئي من $C(J)$ المؤلف من كل الدوال x في $C(J)$ التي تحقق الشرط

$$|x(t)-x_0|\leqq c\beta. \qquad (5)$$

من السهل أن نرى بأن $\bar{C}$ مغلق في $C(J)$ (راجع المسألة ٦) ، وبالتالي فان $\bar{C}$ تام استنادا الى ١ـ٤ـ٧ •

وباجراء المكاملة ، نرى أن (1) يمكن أن يكتب بالشكل $x = Tx$ ، حيث $T: \bar{C} \longrightarrow \bar{C}$ معرف كما يلي

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{6}$$

وفعلا ، فان T معرف أيا كان x من $\bar{C}$ ، ذلك أن $c\beta < b$ استنادا الى (4) ، وبالتالي فاذا كان $x \in \bar{C}$ ، فان $\tau \in J$ و $(\tau, x(\tau)) \in R$ ، ويكون التكامل الوارد في (6) موجودا نظرا لكون f مستمرة على R . وكي نرى أن صورة T وفق $\bar{C}$ هي نفسها ، يمكن استعمال (6) و (2) وعندئذ نجد أن

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right| \leqq c\, |t - t_0| \leqq c\beta.$$

سنبين أن T تقليص على $\bar{C}$. يترتب على شرط ليبشتز (3) أن

$$|Tx(t) - Tv(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))]\, d\tau \right|$$

$$\leqq |t - t_0| \max_{\tau \in J} k\, |x(\tau) - v(\tau)|$$

$$\leqq k\beta\, d(x, v).$$

ولما كانت العبارة الاخيرة مستقلة عن t ، فمن الممكن أخذ القيمة الاكبر max في الطرف الايسر فنجد أن

$$d(Tx, Tv) \leqq \alpha d(x, v) \qquad \text{حيث} \qquad \alpha = k\beta.$$

نرى من (4) أن $\alpha = k\beta < 1$ ، وبالتالي فان T هو تقليص على $\bar{C}$ حقا . وهكذا فان المبرهنة ٥-١-٢ تقتضي بأنه يوجد لـ T نقطة ثابتة وحيدة x في $\bar{C}$ ، أي دالة مستمرة x على J تحقق المساواة $x = Tx$. وبوضع $x(t)$ بدلا من $Tx(t)$ في (6) نجد أن

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{7}$$

ولما كان $(\tau, x(\tau)) \in R$ ، حيث f مستمرة ، فمن الممكن اشتقاق (7) . لذا فان x زوجية ولها مشتق وتحقق (1) . وبالعكس ، فكل حل لـ (1) يجب أن يحقق (7) . وبذا يكتمل البرهان .∎

وتقتضي مبرهنة باناخ أيضا أن الحل x لـ (1) هو نهاية المتتالية $(x_0, x_1, \cdots)$ التي نحصل عليها **بتكرير بيكار**

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \tag{8}$$

حيث $n = 0, 1, \cdots$. الا أنه تجدر بنا الاشارة الى أن الفائدة العملية لهذه الطريقة في الحصول على تقريبات لحل (1) وحدود الخطأ المقابلة ذات فائدة محدودة بسبب المكاملات الواردة .

وفي الختام نورد ما يلي . يمكن اثبات أن استمرار f كاف (وليس لازما) لوجود حل للمسألة (1) ، ولكنه ليس كافيا للوحدانية . وشرط ليبشتز كاف (كما تبين مبرهنة بيكارد) وليس لازما . لمزيد من التفصيل راجع الكتاب التالي :

Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover

ويحوي هذا الكتاب أيضا ملاحظات تاريخية حول مبرهنة بيكارد (الصفحة ٦٣) وبرهانا تقليديا ، بحيث يتمكن القارىء من مقارنة معالجتنا الحالية بالمعالجة التقليدية .

مسائل

١ ــ اذا كان المشتق الجزئي $\partial f / \partial x$ للدالة f موجودا ومستمرا على المستيطل R (مبرهنة بيكار) فبين أن f تحقق شرط ليبشتز على R بالنسبة للمتغير الثاني x .

٢ ــ بين أن الدالة f المحددة بالمساواة $f(t, x) = |\sin x| + t$ تحقق شرط ليبشتز

على المستوي tx بأكمله بالنسبة للمتغير الثاني x ، في حين أن $\partial f/\partial x$ ليس موجودا عندما $x=0$ • ما هي الحقيقة التي يوضحها هذا ؟

٣ ــ هل تحقق الدالة f المعرفة بالمساواة $f(t,x)=|x|^{1/2}$ شرط ليبشتز ؟

٤ ــ أوجد كل الشروط الابتدائية بحيث أن مسألة القيمة الابتدائية $tx'=2x$ و $x(t_0)=x_0$ (آ) ليس لها حلول ، (ب) لها أكثر من حل واحد ، (جـ) لهـا حل واحد بالضبط •

٥ ــ اشرح أسباب الشرطين $\beta<b/c$ و $\beta<1/k$ في (4) •

٦ ــ بين أن $\bar{C}$ في برهان مبرهنة بيكار هي مجموعة مغلقة في $C(J)$ •

٧ ــ أثبت أنه يمكننا في مبرهنة بيكار أن نأخذ بدلا من الثابتة x_0 أي دالـة أخرى $y_0\in\bar{C}$, $y_0(t_0)=x_0$ كدالة ابتدائية للتكرير •

٨ ــ طبق تكرير بيكار (8) على $x'=1+x^2$ و $x(0)=0$ • تحقق أنه بالنسبة الى x_3 ، فان الحدود الحاوية على $t, t^2, \cdots, t^5$ هي تماما مثل حدود الحل التام•

٩ ــ بين أنه يوجد للمسألة $x'=3x^{2/3}$ و $x(0)=0$ عدد غير منته من الحلول x معطـاة كمـا يلـي :

$$x(t)=0 \text{ عندما } t<c, \qquad x(t)=(t-c)^3 \text{ عندما } t\geqq c$$

حيث $c>0$ أي ثابت • هل يحقق $3x^{2/3}$ في اليمين شرط ليبشتز ؟

١٠ــ بين بأن حلول مسألة القيمة الابتدائية

$$x'=|x|^{1/2}, \qquad x(0)=0$$

هي $x_1=0$ و x_2 ، حيث $x_2(t)=t\,|t|/4$ • هل يتناقض هذا مع مبرهنـة بيكار ؟ أوجد حلولا أخرى •

٥ـ٤ تطبيق مبرهنة باناخ على المعادلات التكاملية

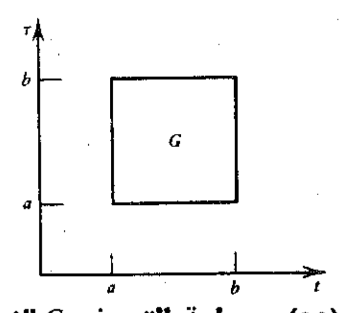
سنفيد في الختــام من مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ كمنهل لمبرهنات الوجود والوحدانية للمعادلات التكاملية • تسمى المعادلة التكاملية من النمط

$$x(t)-\mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau = v(t) \qquad (1)$$

معادلة فريدهولم من النوع الثاني* • ان $[a, b]$ هنا هي فترة معطاة ، و x دالة على $[a, b]$ وهي مجهولة ،و μ وسيط • ان **النــواة** k للمعادلة هي دالة معرفة على المربع $G=[a, b]\times[a, b]$ ، كما أن v هي دالة معطاة على $[a, b]$ •

يمكن دراسة المعادلات التكاملية على فضاءات دوال مختلفة • وفي هــذا البند ، فاننا ندرس (1) على $C[a, b]$ ، أي على فضاء الدوال المستمرة المعرفة على الفترة $J=[a, b]$ حيث المترك d يعطى بالدستور

$$d(x, y)=\max_{t\in J} |x(t)-y(t)|; \qquad (2)$$



الشكل (٥٥) • ساحة التعريف G للنواة k
في المعادلة التكاملية (1) في حالة عددين موجبين a و b •

---

* ان ورود الحد $x(t)$ يمكننا من تطبيق التكرير كما تبين المبرهنة ٥ـ٤ـ١ .
واذا لم تحو معادلة هذا الحد ، فتكون من الشكل

$$\int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau = v(t)$$

ويقال عنها انها من **النوع الاول** •

(راجع ١ــ٥ــ٥) • ومن المهم أن نلاحظ لدى تطبيقنا الحالي لمبرهنة باناخ أن $C[a, b]$ تام • سنفترض أن v المنتمية الى $C[a, b]$ و k مستمرتان علــى G •
عندئذ تكون k دالة محدودة على G ،وليكن مثلا

$$|k(t, \tau)| \leqq c \qquad \text{أيا كان } (t, \tau) \in G \tag{3}$$

من الواضح أنه يمكن كتابة (1) بالشكل $x = Tx$ ، حيث

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

بما أن v و k مستمرتان ، فان الدستور (4) يحدد مؤثرا $T: C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ •
سنفرض الآن قيدا على μ بحيث يغدو T تقليصا • نستنتج من (2) و (4) أن

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\
&= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau \right| \\
&\leqq |\mu| \max_{t \in J} \int_a^b |k(t, \tau)|\, |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \\
&\leqq |\mu|\, c \max_{\sigma \in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b d\tau \\
&= |\mu|\, c\, d(x, y)(b - a).
\end{aligned}$$

ويمكن كتابة هذا بالشكل $d(Tx, Ty) \leqq \alpha\, d(x, y)$ ، حيث

$$\alpha = |\mu|\, c(b - a).$$

نرى أن T يمكن أن يصبح تقليصا $(\alpha < 1)$ اذا كان

$$|\mu| < \frac{1}{c(b - a)}. \tag{5}$$

لذا فان مبرهنة النقطة الثابتة ٥ــ١ــ٢ تعطينا الآن المبرهنة التالية :

٥-٤-١ مبرهنة (معادلة فريدهولم التكاملية)

لتكن الدالتان k و v في (1) مستمرتين على $J \times J$ و $J=[a, b]$ على الترتيب ، ولنفترض أن μ يحقق (5) حيث c معرفة في (3) . عندئذ يوجد لـ (1) حل وحيد x على J . ان هذه الدالة x هي نهاية المتتالية التكريرية $(x_0, x_1, \cdots)$ حيث x_0 أي دالة مستمرة على J ،وحيث

$$x_{n+1}(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) x_n(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

عندما $n = 0, 1, \cdots$.

هذا وسندرس النظرية الشهيرة للمعادلات التكاملية في الفصل الثامن .

لننتقل الآن الى **معادلة فولتيرا التكاملية**

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t, \tau) x(\tau)\, d\tau = v(t). \tag{7}$$

ان الفرق بين (1) و (7) يكمن في أن الحد الاعلى للتكامل في (1) هو عدد ثابت b ، في حين أنه في (7) متغير . وهذا أمر أساسي ، فاننا دون فرض أي قيد على μ نجد مبرهنة الوجود والوحدانية التالية .

٥-٤-٢ مبرهنة (معادلة فولتيرا التكاملية)

لنفترض أن v الواردة في (7) مستمرة على $[a, b]$ ، وأن النواة k مستمرة على المنطقة المثلثة R في المستوي $t\tau$ المحددة بالمتباينات $a \leqq \tau \leqq t$ و $a \leqq t \leqq b$ (أنظر الى الشكل ٥٦) . عندئذ يوجد لـ (7) حل وحيد x على $[a, b]$ أيا كان μ .

البرهـــان :

نـــرى أن المعادلـــة (7) يمكـــن أن تكتـــب بالشـــكل $x = Tx$ حيـــث $T: C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ معرف بالمساواة

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau) x(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

الشكل (٥٦) • المنطقة المثلثة R في المبرهنة ٥ــ٤ــ٢ في حالة عددين موجبين a و b

بما أن k مستمرة على R وأن R مغلقة ومحدودة ، فان k محدودة علـــى R ، ولبكن مثلا

$$|k(t, \tau)| \leqq c \qquad \text{أيا كان } (t, \tau) \in R$$

وهكذا ، فاننا نجد استنادا الى (2) أنه أيا كان x و y من $C[a, b]$ فان

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)]\, d\tau \right| \\ &\leqq |\mu|\, c\, d(x, y) \int_a^t d\tau \\ &= |\mu|\, c(t-a)\, d(x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

سنبين بالاستقراء الرياضي أن

$$|T^m x(t) - T^m y(t)| \leqq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x, y). \tag{10}$$

ان هذه المتباينة في الحالة $m = 1$ ليست سوى (9) • فـاذا افترضنا أن (10) صحيحة من أجل m ، فاننا نجد من (8) أن

$$\begin{aligned} |T^{m+1} x(t) - T^{m+1} y(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau)[T^m x(\tau) - T^m y(\tau)]\, d\tau \right| \\ &\leqq |\mu|\, c \int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(\tau - a)^m}{m!}\, d\tau\, d(x, y) \end{aligned}$$

$$= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y),$$

لذا فاننا نكون قد استنتجنا صحــة (10) أيا كان m بتطبيــق طريقــة الاستقراء الرياضـــي •

وبالافادة من $t-a \leqq b-a$ في الطرف الايمن من (10) ، ومن ثم بأخذ القيمة الاكبر max في الطرف الايسر عندما تمسح t المجموعة J ، فاننا نستنتج مــن (10) أن

$$d(T^m x, T^m y) \leqq \alpha_m d(x, y)$$

حيــث

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(b-a)^m}{m!}.$$

نلاحظ أنه أيا كان μ المثبت ، وأيا كان العدد m الكبير بقدر كاف ، فان $\alpha_m < 1$ • لذا فان T^m المقابل يكون تقليصا على $C[a, b]$ ، وعندها نستنتج صحة مبرهنتنا من التمهيدية التالية :-

٥ـ٤ـ٣ تمهيدية (النقطة الثابتة)

ليكن $T\colon X \longrightarrow X$ تطبيقا مستمرا (راجع ١ـ٣ـ٣) على فضاء متري تام $X=(X, d)$ ، ولنفترض أن T^m تقليص على X ، حيث m عــدد صحيح موجب . عندئذ يوجد لـ T نقطة ثابتة وحيدة •

البرهــان :

ان $B = T^m$ هو فرضا تقليص على X ، أي أن $d(Bx, By) \leqq \alpha d(x, y)$ أيا كان x, y من X ، وهنا $\alpha < 1$ • لذا فاننا نجد أيا كان x_0 من X أن

$$\begin{aligned} d(B^n T x_0, B^n x_0) &\leqq \alpha d(B^{n-1} T x_0, B^{n-1} x_0) \\ &\cdots \leqq \alpha^n d(T x_0, x_0) \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty). \end{aligned} \tag{11}$$

ان مبرهنة باناخ ٥ـ١ـ٢ تقتضي أن يوجد لـ B نقطة ثابتة وحيدة ، سنرمز لها بـ

x ، و $B^n x_0 \longrightarrow x$ • وبما أن التطبيق T مستمر ، فان هذا يقتضي أن يكـون $B^n T x_0 = T B^n x_0 \longrightarrow Tx$ • لذا فاننا نجد وفق (ب) من ١ــ٤ــ٢ أن

$$d(B^n T x_0, B^n x_0) \longrightarrow d(Tx, x),$$

وبالتالي فان $d(Tx, x) = 0$ وفق (11) • ويبين هذا أن x نقطة ثابتة لـ T • ولما كانت كل نقطة ثابتة لـ T ثابتة لـ B كذلك ، فاننا نرى أنه لا يمكن أن يوجد لـ T أكثر من نقطة ثابتة واحدة •∎

نلاحظ في الختام أنــه يمكن اعتبار معادلة فولتيرا معادلة فريدهولم خاصة نواتها k صفرية في ذلك الجزء من المربع $[a, b] \times [a, b]$ حيث يكون $\tau > t$ (انظر الى الشكلين ٥٥و٥٦) ، وقد تكون k غير صفرية في نقاط من القطر $(\tau = t)$ •

مســائل

١ ــ حل المعادلة التالية باستخدام التكرير ، وباختيار $x_0 = v$:

$$x(t) - \mu \int_0^1 e^{t-\tau} x(\tau)\, d\tau = v(t) \qquad (|\mu| < 1).$$

٢ ــ **(المعادلة التكاملية غير الخطية)** اذا كانت v و k مستمرتين على $[a, b]$ و $C = [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ على الترتيب ، وكانت k محقّقة على G لشرط ليبشتز مــن النمــط

$$|k(t, \tau, u_1) - k(t, \tau, u_2)| \leqq l\, |u_1 - u_2|,$$

فبين بأنه يوجد للمعادلة التكاملية غير الخطية

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau, x(\tau))\, d\tau = v(t)$$

حل وحيد x أيا كان μ المحقق للشرط $|\mu| < 1/l(b-a)$ •

٣ ـ من المهم أن ندرك بأن المعادلات التكاملية تنشأ أيضا من مسائل في المعادلات التفاضلية • (آ) اكتب مثلا مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \qquad x(t_0)=x_0$$

على شكل معادلة تكاملية ، وحدد نوع المعادلة هذه • (ب) بين أن مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(t, x), \qquad x(t_0)=x_0, \qquad x'(t_0)=x_1$$

الحاوية على معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية يمكن أن تحول الى معادلة فولتيرا التكاملية •

٤ ـ **(متسلسلة نويمان)** اذا عرفنا مؤثرا S بالمساواة

$$Sx(t)=\int_a^b k(t, \tau)x(\tau)\, d\tau$$

ووضعنا $z_n=x_n-x_{n-1}$ ، فبين أن (6) تقتضي أن يكون

$$z_{n+1}=\mu S z_n.$$

واذا اخترنا $x_0=v$ ، فبين أن (6) تعطي **متسلسلة نويمان**

$$x=\lim_{n\to\infty} x_n=v+\mu Sv+\mu^2 S^2 v+\mu^3 S^3 v+\cdots.$$

٥ ـ حل المعادلة التكاملية التالية (آ) بالافادة من متسلسلة نويمان ، (ب) بطريقة مباشرة

$$x(t)-\mu\int_0^1 x(\tau)\, d\tau=1.$$

٦ ــ حل المعادلة التكاملية

$$x(t) - \mu \int_a^b c x(\tau)\, d\tau = \bar{v}(t)$$

حيث c ثابت ، وبين كيف يمكن استعمال متسلسلة نويمان الموافقة للحصول على شرط التقارب (5) لمتسلسلة نويمان للمعادلة (1) .

٧ ــ **(النواة التكريرية . النواة الحالة) . أثبت أن متسلسلة نويمان الواردة في المسألة (٤) يمكن أن تكتب بالشكل**

$$(S^n v)(t) = \int_a^b k_{(n)}(t, \tau) v(\tau)\, d\tau \qquad n = 2, 3, \cdots,$$

حيث تعطى **النواة التكريرية** $k_{(n)}$ كما يلي

$$k_{(n)}(t, \tau) = \int_a^b \cdots \int_a^b k(t, t_1) k(t_1, t_2) \cdots k(t_{n-1}, \tau)\, dt_1 \cdots dt_{n-1}$$

وبالتالي يمكن كتابة متسلسلة نويمان بالشكل

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) v(\tau)\, d\tau + \mu^2 \int_a^b k_{(2)}(t, \tau) v(\tau)\, d\tau + \cdots$$

أو أنه يمكننا باستخدام النواة الحالة $\tilde{k}$ المعرفة بالدستور

$$\tilde{k}(t, \tau, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j k_{(j+1)}(t, \tau) \qquad (k_{(1)} = k)$$

أن نكتب المتسلسلة المذكورة بالشكل

$$x(t) = v(t) + \mu \int_a^b \tilde{k}(t, \tau, \mu) v(\tau)\, d\tau.$$

٨ ــ من المفيد معرفة أنه يمكن أيضا الحصول على متسلسلة نويمان الواردة في المسألة ٤ بأن نعوض متسلسلة القوى التالية

$$x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \cdots$$

في (1) ،ثم بالمكاملة حدا حدا ، ومن ثم بمقارنة المعاملات • بين بأن هذا يعطي

$$v_0(t) = v(t), \qquad v_n(t) = \int_a^b k(t, \tau) v_{n-1}(\tau)\, d\tau, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

وبفرض أن $|v(t)| \leqq c_0$ و $|k(t, \tau)| \leqq c$ ، بين أن

$$|v_n(t)| \leqq c_0[c(b-a)]^n,$$

وبالتالي فان (5) تقتضي التقارب •

٩ ـ حل (1) باستخدام المسألة ٧ ، حيث $a = 0$ و $b = 2\pi$ و

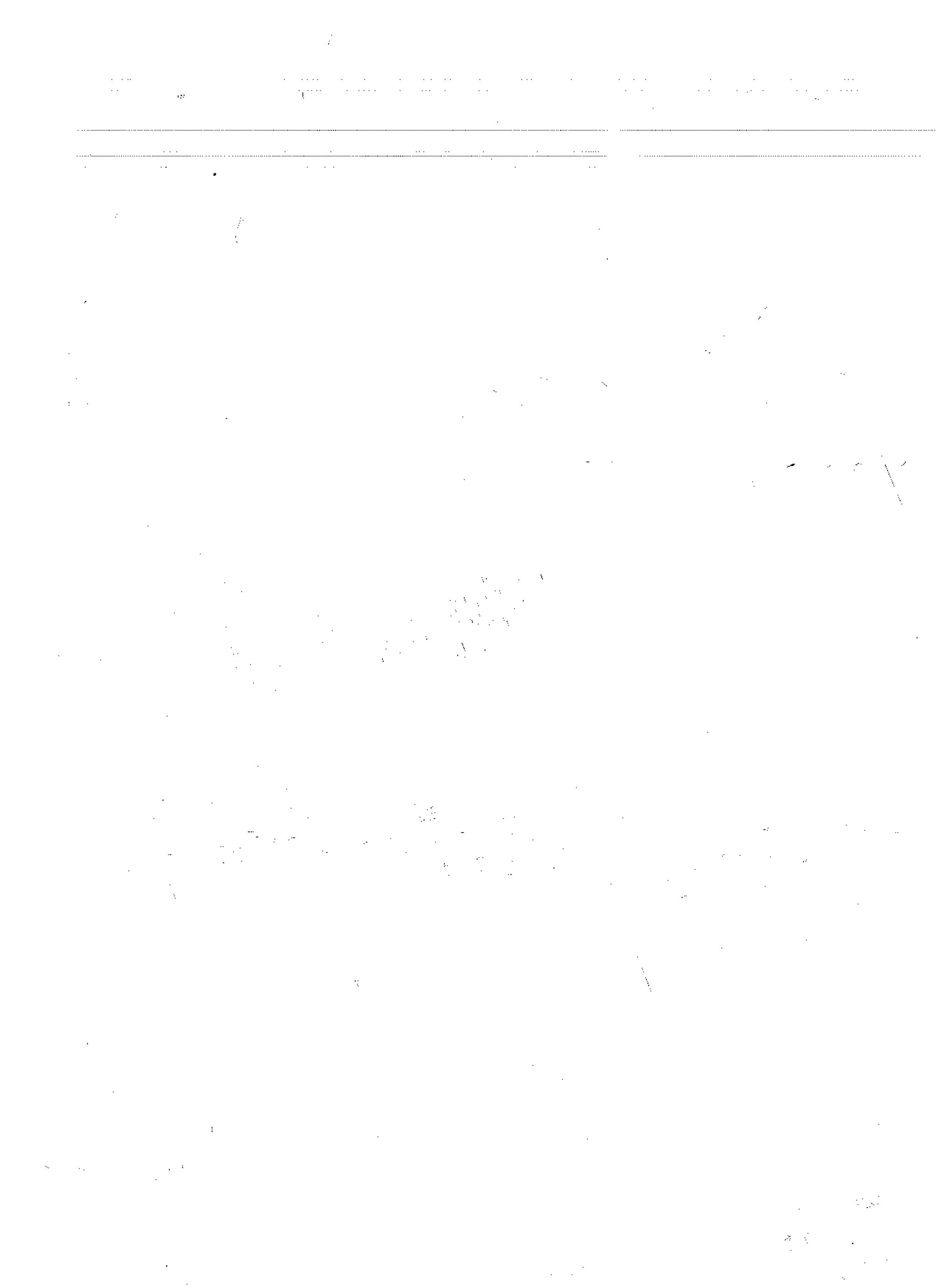
$$k(t, \tau) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nt \cos n\tau.$$

١٠ـ لنفترض في (1) أن $a = 0$ و $b = \pi$ و

$$k(t, \tau) = a_1 \sin t \sin 2\tau + a_2 \sin 2t \sin 3\tau.$$

اكتب الحل بدلالة النواة الحالّة (راجع المسألة ٧) •

* * *



ثبت المصطلحات

ـ أ ـ

إتمـــام	completion
ارتباط خطي	linear dependence
أس	exponent
أسان مترافقان	conjugate exponents
استقراء رياضي	mathematical induction
استقلال خطي	linear independence
استكمال	interpolation
اسقاط (مسقط)	projection
الحد الادنى	infimum
الحد الاعلى	supremum
انعكاسية	reflexivity
انغلاق	closedness
انموذج	model
ايزومورفيزم	isomorphism

— ب —

dimension	بعـد
codimension	ـ متمم

— ت —

complete	تـام
partition	تجزئة
compactness	تراص
sequential —	ـ تتابعي
local —	ـ موضعي
linear combination	تركيب خطي
mapping	تطبيـق
isometric —	ـ ايزومتري (متسـاوي المسافة)
bilinear —	ـ ثنائي الخطية
linear —	ـ خطي
conjugate linear —	ـ خطي مرافق
natural —	ـ طبيعي
inverse —	ـ عكسي
surjective —	ـ غامـر
canonical —	ـ قانوني
injective —	ـ متباين
bounded —	ـ محدود
idempotent —	ـ مراوح
continuous —	ـ مستمر
open —	ـ مفتوح

variation	تغـير
total —	ـ كلي
bounded —	ـ محدود
convergence	تقارب
operator —	ـ بالنسبة للمؤثرات
weak —	ـ ضعيف
weak* —	ـ ضعيف*
strong —	ـ قوي
uniform —	ـ منتظم
pointwise —	ـ نقطي
estimate	تقديـر
proior —	ـ سابق
posterior —	ـ لاحق
contraction	تقليص
equivalence	تكافـؤ
unitary —	ـ واحدي
integral	تكامـل
Riemann - Stieltjes —	ـ ريمان ـ ستيلجس
iteration	تكريـر
weak completeness	تمام ضعيف
representation	تمثيـل
extension	تمديد (ممدد)
proper —	ـ فعلي
closed —	ـ مغلق
lemma	تمهيدية
symmetry	تناظـر

- ج -

frontier (boundary)	جبهة (حد)
product	جـداء
inner —	ـ داخلي
cartesian —	ـ ديكارتي
conjugate linear —	ـ خطي مرافق
sesquilinear —	ـ خطي مرة ونصف
scalar —	ـ عـددي
vector —	ـ متجهي
halflinear —	ـ نصف خطي
neighbourhood	جـوار
system	جملـة
sparse —	ـ غير كثة

- ح -

limit	حـد
infimum (g.l.b.)	ـ أدنـى
supremum (l.u.b.)	ـ أعـلى
polinomials	حدوديات
Bernstein —	ـ بيرنشتاين
Laguerre —	ـ لاكـير
Legendre —	ـ لوجاندر

- خ -

property	خاصة

ـ تبديلية	commutative —
ـ الانعكاس	reflexivity
ـ التخالف	antisymmetry
ـ التعدي	transitivity
ـ القيمة الصغرى	minimum —
خط تأخير كهربائي	electric delay line
خطـي	linear

ـ د ـ

دالـة	function
ـ مسافة (مترك)	distance — (metric)
ـ مميزة	characteristic —
ـ مولدة	generating —
ـ هامنغ	Hamming —
دالـي	functional
ـ خطي	linear —
ـ خطي جزئيا	sublinear —
ـ متجانس ايجابا	positive homogeneous —
ـ محدود	bounded —
دستور	formula
ـ رودريك	Rodrigue's —
دلتاكرونيكر	Kronecker delta

ـ ر ـ

رنـين	resonance

— س —

domain	ساحة
row	سطر
chain	سلسلة

— ش —

lattice	شبكية
pseudometric	شبه مترك
pseudonorm	شبه نظيم
condition	شرط
positive homogeneous —	— التجانس ايجابا
subadditive —	— الجمعية جزئيا
Lipschitz —	— ليبشتز

— ص —

class	صف (صنف)
form	صيغة
linear —	— خطية
sesquilinear —	— خطية مرة ونصف المرة

— ض —

multiplication	ضرب
inner —	— داخلي
scalar —	— عددي
vector —	— متجهي

ـ ط ـ

method	طريقــه
— of simultaneous corrections	ـ التصحيحات الآنية
regular summability —	ـ في الجموعية المنتظمة
Euler's —	ـ اولـــر
permanent —	ـ دائمـــة
Cesàro's sunmability —	ـ شيزارو C_1 في الجموعية
Cesàro's C_n - method —	ـ C_n لشيزارو
Gram - Schmidt process	ـ غرام ـ شميت
sparse —	ـ غير كثة
a summability —	ـ في الجموعية
a matrix —	ـ مصفوفية
a regular —	ـ منتظمة
Hölder summability —	ـ هولدر في الحموعية
A - method	ـ A
embedding	طمـــر
canonical —	ـ قانوني
embeddable	طمـــور

ـ ع ـ

annihilator	عـــادم
number	عـــدد
cardinal —	ـ أصلي (كاردينالي)
real —	ـ حقيقي
rational —	ـ عادي

node	عقـدة
relation	علاقـة
Parseval —	ـ بارسفال
column	عمـود
element	عنصـر
minimal —	ـ أصغري
maximal —	ـ أعظمي
upper bound	ـ راجح
lower bound	ـ قاصر
comparable elements	عنصران متقارنان

ـ غ ـ

nonlinear	غير خطي

ـ ف ـ

category	فئـة
space	فضـاء
euclidean —	ـ اقليدي
reflexive —	ـ الـدوال
Hilbert sequence —	ـ المتتاليات لهلبرت
reflexive —	ـ انعكاسي
complete —	ـ تام
weakly complete —	ـ تام بضعف
dual —	ـ ثنوي
second dual	ـ ثنوي ثاني

ـ ثنوي جبري	algebraic dual —
ـ جداء داخلي	inner product —
ـ جزئي	subspace
ـ جزئي غير فعلي	improper subspace
ـ جزئي فعلي	proper subspace
ـ حقيقي	real —
ـ طبولوجي	topological —
ـ طمـور	embeddable —
ـ عدود	countable —
ـ عقدي	complex —
ـ غير عدود	uncountable —
ـ غير منتهي البعد	infinite dimensional —
ـ فصول	separable —
ـ متتاليات	sequence —
ـ متجهي	vector —
ـ متري	metric —
ـ متقطع	discrete —
ـ مجرد	abstract —
ـ مرافق	conjugate —
ـ منتهي البعد	finite dimensional —
ـ منظم	normed —
ـ هزيـل	meager —
ـ وحدي (واحدي)	unitary —
فوق المستوي	hyperplane

ـ ق ـ

قاعدة (قانون)	rule

the three-eights —	ـ الثمانيات الثلاث
the rectangular —	ـ المستطيل
Simpsons —	ـ سمبسون
the trapezoidal —	ـ شبه المنحرف
basis	قاعدة (أساس)
dual —	ـ ثنوية
Schauder —	ـ شاودر
canonical —	ـ قانونية
Hamel —	ـ هامل
sphere	قشرة كروية
diameter	قطـر
— of a set	ـ مجموعة
segment	قطعة مستقيمة
value	قيمـة
eigenvalue	ـ ذاتية
minimum	ـ صغرى
maximum	ـ عظمى

ـ ك ـ

ball	كـرة
colsed —	ـ مغلقة
open —	ـ مفتوحة
unit —	ـ واحدية

ـ ل ـ

invariance	لاتغـير
translation —	ـ الانسحاب

— م —

مبـدأ	principle
ـ المحدودية المنتظمة	— of uniform boundedness
مبرهنة	theorem
ـ البعد المنتهي	finite dimension —
ـ البيان المغلق	closed graph —
ـ التطبيق المفتوح	open mapping —
ـ العكس المحدود	bounded inverse —
ـ التقليص	contraction —
ـ الفئـة	category —
ـ المحدودية المنتظمة	uniform boundedness —
ـ المؤثر الخطي المغلق	closed linear operator —
ـ النقطة الثابتة	fixed point —
ـ النقطة الثابتة لباناخ	Banach fixed point —
ـ بولزانو ـ ڤيرشتراس	Bolzano-wierstrass —
ـ بوليـا	Pólya —
ـ بير في الفئات	Baire category —
ـ ستيكلوف	Steklov's —
ـ ڤيرشتراس في التقريب	Wierstrass approximation —
ـ كيرشكورين	Gershgorin's —
متباينـة	inequality
ـ المثلث	triangle —
ـ المثلث المعممة	generalized triangle —
ـ كوشي ـ شفارتز للمجاميع	Cauchy - Schwarz — for sums
ـ منكوفسكي للمجاميع	Minkowski — for sums

Hölder — for sums	ـ هولدر للمجاميع
sequence	متتاليـــة
fundamental —	ـ أساسية
iterative —	ـ تكريرية
subsequence	ـ جزئيــة
— of interpolation polynomials	ـ حدوديات الاستكمال
monotone —	ـ رتيبة
weak Cauchy —	ـ كوشي الضعيفة
divergent —	ـ متباعدة
convergent —	ـ متقاربة
orthogonal —	ـ متعامدة
orthonormal —	ـ متعامدة منظمة
total orthonormal —	ـ متعامدة منظمة كلية
uniformly convergent —	ـ متقاربة بانتظام
weakly convergent —	ـ متقاربة بضعف
strongly convergent —	ـ متقاربة بقوة
limit of a —	ـ نهايــة
vector	متجــه
zero —	ـ اصفري
column —	ـ عمودي
minimizing —	ـ مصغر
metric (distance function)	مترك (دالة مسـافة)
taxicab —	ـ سيارة الاجرة
induced —	ـ محدث (مستخلص ، مولد)
discrete —	ـ متقطع
uniform —	ـ منتظم

series	متسلسلة
infinite —	ـ غير منتهية
absolutely convergent —	ـ متقاربة بالاطلاق
Neumann —	ـ نويمان
identity	متطابقة
Appolonius —	ـ ابولونيوس
polarization —	ـ الاستقطاب
prerequisite	متطلب
variable	متغير
complement	متمم
algebraic —	ـ جبري
orthogonal —	ـ معامد
sum	مجموع
partial —	ـ جزئي
direct —	ـ مباشر
set	مجموعة
underlying —	ـ الرديف
power —	ـ القوة
countable —	ـ عدودة
nowhere dense —	ـ غير كثيفة في اي مكان
nonmeager —	ـ غير هزيلة
dense —	ـ كثيفة
total —	ـ كلية
total orthonormal —	ـ متعامدة منظمة كلية
convex —	ـ محدبة
bounded —	ـ محدودة

linearly dependent —	ـ مرتبطة خطيا
linearly independent —	ـ مستقلة خطيا
ordered —	ـ مرتبة
partially ordered —	ـ مرتبة جزئيا
totally ordered — (chain)	ـ مرتبة كليا (سلسلة)
coset	ـ مشاركة
— of the first category	ـ من الفئة الاولى
— of the second category	ـ من الفئة الثانية
rare —	ـ نادرة
meager —	ـ هزيلة
n - tuple	مرتّبــة
initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
parallelogram equality	مساواة متوازي الاضلاع
complex plane	مستوي عقدي
projection	مسقط (اسقاط)
differential	مشتق
matrix	مصفوفة
(real) symmetric —	ـ (حقيقية) متناظرة
skew - symmetric —	ـ متناظرة تخالفية
orthogonal —	ـ متعامدة
normal —	ـ ناظمية
Hermitian —	ـ هرميتية
skew - Hermitian —	ـ هرميتية تخالفية
unitary —	ـ واحدية (وحدية)
equation	معادلــة
differential —	ـ تفاضلية

partial differential —	ـ تفاضلية جزئية
ordinary differential —	ـ تفاضلية عادية
integral —	ـ تكاملية
Fredholm —	ـ فريدهولم
Fredholm — of the first kind	ـ فريدهولم من النوع الاول
Fredholm — of the second kind	ـ فريدهولم من النوع الثاني
Volterra —	ـ فولتـيرا
coefficient	معامـل
criterion	معيـار
Cauchy convergence —	ـ تقارب كوشي
row sum —	ـ مجموع الاسطر
column sum —	ـ مجموع الاعمدة
square sum —	ـ مجموع المربعات
restriction	مقصـور
representative	ممثـل
extension	ممدد (تمديد)
proper —	ـ فعلـي
expansion	منشـور
transpose	منقـول
operator	مؤثـر
projection —	ـ الاسقاط
left shift —	ـ النقل الايسر
right shift —	ـ النقل الايمن
integral —	ـ تكاملي
bounded linear —	ـ خطي محدود
conjugate linear —	ـ خطي مرافق

ـ صفري	zero —
ـ عكسي	inverse —
ـ قرين ذاتيا (مترافق ذاتيا)	self - adjoint —
ـ مطابقة	identity —
ـ مفاضلة	differentiation —
ـ ناظمي	normal —
ـ هلبرت المرافق	Hilbert - adjoint —
ـ واحدي (وحدي)	unitary —

ـ ن ـ

نصف القطر الطيفي	spectral radius
نصف النظيم	seminorm
نصف فضاء	half space
نصف مترك	semimetric
نظائـم	norms
ـ متكافئة	equivalent —
نظيـم	norm
ـ اقليدي	euclidean —
ـ طبيعي	natural —
ـ منسجم مع نظيم	a — compatible with a —
نقطـة	point
ـ تراكم (تجمع)	accumulation —
ـ ثابتة	fixed —
ـ حدية (جبهية)	boundary —
ـ داخلية	interior —

closure —	ـ ملاصقة
pointwise	نقطيــا
limit	نهايــة
A - limit	A ـ
weak —	ـ ضعيفة
weak* —	ـ ضعيفة*
strong —	ـ قويــة
generalized —	ـ معممة
kernel	نــواة
iterated —	ـ تكريرية
resolvent —	ـ حالــة
— of an operator	ـ مؤثــر

ـ هـ ـ

homomorphism	هومومورفيزم (تشاكل)
homeomorphism	هوميومورفيزم (تصاكل)

ـ و ـ

unitary	واحدي (وحدي)

مسرد المراجع

Banach, S. (1922), Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Math.* **3**, 133–181

Banach, S. (1929), Sur les fonctionnelles linéaires II. *Studia Math.* **1**, 223–239

Banach, S. (1932), *Théorie des opérations linéaires.* New York: Chelsea

Banach, S., et H. Steinhaus (1927), Sur le principe de la condensation de singularités. *Fundamenta Math.* **9**, 50–61

Berberian, S. (1961), *Introduction to Hilbert Space.* New York: Oxford University Press

Bernstein, S. N. (1912), Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Comm. Soc. Math. Kharkow* **13**, 1–2

Bielicki, A. (1956), Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **4**, 261–268

Birkhoff, G. (1967), *Lattice Theory.* 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **25.** Providence, R. I.: American Mathematical Society

Birkhoff, G., and S. Mac Lane (1965), *A Survey of Modern Algebra.* 3rd. ed. New York: Macmillan

Bohnenblust, H. F., and A. Sobczyk (1938), Extensions of functionals on complex linear spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 91–93

Bourbaki, N. (1955), *Éléments de mathématique,* livre V. *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. III à V. Paris: Hermann

Bourbaki, N. (1970), *Éleménts de mathématique, Algèbre.* Chap. 1 à 3. Paris: Hermann

Cheney, E. W. (1966), *Introduction to Approximation Theory.* New York: McGraw-Hill

Churchill, R. V. (1963), *Fourier Series and Boundary Value Problems.* 2nd ed. New York: McGraw-Hill

Courant, R., and D. Hilbert (1953–62), *Methods of Mathematical Physics.* 2 vols. New York: Interscience/Wiley

Cramér, H. (1955), *The Elements of Probability Theory and Some of its Applications.* New York: Wiley

Day, M. M. (1973), *Normed Linear Spaces.* 3rd ed. New York: Springer

Dieudonné, J. (1960), *Foundations of Modern Analysis.* New York: Academic Press

Dixmier, J. (1953), Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens. *Acta Math. Szeged* **15,** 29–30

Dunford, N., and J. T. Schwartz (1958–71), *Linear Operators.* 3 parts. New York: Interscience/Wiley

Edwards, R. E. (1965), *Functional Analysis.* New York: Holt, Rinehart and Winston

Enflo, P. (1973), A counterexample to the approximation property. *Acta Math.* **130,** 309–317

Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi (1953–55), *Higher Transcendental Functions.* 3 vols. New York: McGraw-Hill

Fejér, L. (1910), Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe. *Journal Reine Angew. Math.* **137,** 1–5

Fréchet, M. (1906), Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22,** 1–74

Fredholm, I. (1903), Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.* **27,** 365–390

Friedrichs, K. (1935), Beiträge zur Theorie der Spektralschar. *Math. Annalen* **110,** 54–62

Gantmacher, F. R. (1960), *The Theory of Matrices.* 2 vols. New York: Chelsea

Gelfand, I. (1941), Normierte Ringe. *Mat. Sbornik* (*Recueil mathématique*) N. S. **9,** (51), 3–24

Gram, J. P. (1883), Ueber die Entwickelung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. *Journal Reine Angew. Math.* **94,** 41–73

Haar, A. (1918), Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Annalen* **78,** 294–311

Hahn, H. (1922), Über Folgen linearer Operationen. *Monatshefte Math. Phys.* **32,** 3–88

Hahn, H. (1927), Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. *Journal Reine Angew. Math.* **157,** 214–229

Halmos, P. R. (1958), *Finite-Dimensional Vector Spaces.* 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold

Hamming, R. W. (1950), Error detecting and error correcting codes. *Bell System Tech. Journal* **29,** 147–160

Hellinger, E., und O. Toeplitz (1910), Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. *Math. Annalen* **69,** 289–330

Helmberg, G. (1969), *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space.* New York: American Elsevier

Hewitt, E., and K. Stromberg (1969), *Real and Abstract Analysis.* Berlin: Springer

Hilbert, D. (1912), *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Repr. 1953. New York: Chelsea

Hille, E. (1973), *Analytic Function Theory.* Vol. I. 2nd ed. New York: Chelsea

Hille, E., and R. S. Phillips (1957), *Functional Analysis and Semi-Groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31.** Rev. ed. Providence, R. I.: American Mathematical Society

Hölder, O. (1889), Über einen Mittelwertsatz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 38–47

Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Equations.* New York: Dover

James, R. C. (1950), Bases and reflexivity of Banach spaces. *Annals of Math.* (2) **52,** 518–527

James, R. C. (1951), A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **37,** 174–177

Kelley, J. L. (1955), *General Topology.* New York: Van Nostrand

Kelley, J. L., and I. Namioka (1963), *Linear Topological Spaces.* New York: Van Nostrand

Kreyszig, E. (1970), *Introductory Mathematical Statistics.* New York: Wiley

Kreyszig, E. (1972), *Advanced Engineering Mathematics.* 3rd ed. New York: Wiley

Lebesgue, H. (1909), Sur les intégrales singulières, *Ann. de Toulouse* (3) **1,** 25–117

Lorch, E. R. (1939), On a calculus of operators in reflexive vector spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **45,** 217–234

Lorch, E. R. (1962), *Spectral Theory.* New York: Oxford University Press

Löwig, H. (1934), Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl. *Acta Sci. Math. Szeged* **7,** 1–33

McShane, E. J. (1944), *Integration.* Princeton, N. J.: Princeton University Press

Merzbacher, E. (1970), *Quantum Mechanics.* 2nd ed. New York: Wiley

Minkowski, H. (1896), *Geometrie der Zahlen.* Leipzig: Teubner

Murray, F. J. (1937), On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p. *Trans. Amer. Math. Soc.* **41**, 138–152

Naimark, M. A. (1972), *Normed Algebras.* 2nd ed. Groningen: Wolters-Noordhoff

Neumann, J. von (1927), Mathematische Begründung der Quantenmechanik. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, 1–57

Neumann, J. von (1929–30), Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Math. Annalen* **102**, 49–131

Neumann, J. von (1929–30b), Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. *Math. Annalen* **102**, 370–427

Neumann, J. von (1936), Über adjungierte Funktionaloperatoren. *Annals of Math.* (2) **33**, 294–310

Poincaré, H. (1896), La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. *Acta Math.* **20**, 59–142

Pólya, G. (1933), Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Zeitschr.* **37**, 264–286

Rellich, F. (1934), Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. *Math. Annalen* **110**, 342–356

Riesz, F. (1909), Sur les opérations fonctionnelles linéaires. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **149**, 974–977

Riesz, F. (1918), Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Math.* **41**, 71–98

Riesz, F. (1934), Zur Theorie des Hilbertschen Raumes. *Acta Sci. Math. Szeged* **7**, 34–38

Riesz, F., and B. Sz.-Nagy (1955), *Functional Analysis.* New York: Ungar

Rogosinski, W. (1959), *Fourier Series.* 2nd ed. New York: Chelsea

Royden, H. L. (1968), *Real Analysis.* 2nd ed. New York: Macmillan

Sard, A., and S. Weintraub (1971), *A Book of Splines.* New York: Wiley

Schauder, J. (1930), Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen. *Studia Math.* **2**, 1–6

Schiff, L. I. (1968), *Quantum Mechanics.* 3rd ed. New York: McGraw-Hill

Schmidt, E. (1907), Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Math. Annalen* **63**, 433–476

Schmidt, E. (1908), Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **25**, 53–77

Schur, I. (1921), Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *Journal Reine Angew. Math.* **151**, 79–111

Sobczyk, A. (1941), Projections in Minkowski and Banach spaces. *Duke Math. Journal* **8**, 78–106

Stone, M. H. (1932), *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **15.** New York: American Mathematical Society

Szegö, G. (1967), *Orthogonal Polynomials.* 3rd ed. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **23.** Providence, R. I.: American Mathematical Society

Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis.* New York: Wiley

Todd, J. (1962), *Survey of Numerical Analysis.* New York: McGraw-Hill

Wecken, F. J. (1935), Zur Theorie linearer Operatoren. *Math. Annalen* **110**, 722–725

Weierstrass, K. (1885), Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 633–639, 789–805

Wiener, N. (1922), Limit in terms of continuous transformation. *Bull. Soc. Math. France* (2) **50**, 119–134

Wilks, S. S. (1962), *Mathematical Statistics.* New York: Wiley

Wintner, A. (1929), Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. *Math. Zeitschr.* **30**, 228–282

Yosida, K. (1971), *Functional Analysis.* 3rd ed. Berlin: Springer

Zaanen, A. C. (1964), *Linear Analysis.* Amsterdam: North-Holland Publ.

Zakon, E. (1973), *Mathematical Analysis.* Part II. Lecture Notes. Department of Mathematics, University of Windsor, Windsor, Ont.

الفهرس

